

## La existencia de los objetos matemáticos\*

Michael Dummett

### ABSTRACT

This paper addresses two central questions within the philosophy of mathematics: (1) What is the ground of the necessity of mathematical theorems? and (2) How is our belief in the existence of the objects of the fundamental mathematical theories to be justified? Frege's logicist answer to these questions is analysed in detail, as well as Crispin Wright's attempt to refashion it. Hardly anyone else, claims the author, has even tried to address these questions. The author argues that those mathematical theorems that are genuinely applicable to reality hold of analytical necessity, since (he conjectures) it is possible to reformulate them so that the objects assumed are not purely mathematical objects, but ones abstracted from empirical reality.

### RESUMEN

En este artículo se tratan dos problemas centrales de la filosofía de la matemática: (1) ¿Cuál es el fundamento de la necesidad de los teoremas matemáticos? y (2) ¿Cómo se puede justificar nuestra creencia en la existencia de los objetos de las teorías matemáticas fundamentales? La respuesta logicista de Frege a estas preguntas es objeto de estudio detenido, así como el nuevo intento de rehacer esa respuesta por parte de Crispin Wright. Prácticamente nadie más, sostiene el autor, ha intentado analizar siquiera estas cuestiones. El autor argumenta que aquellos teoremas que son genuinamente aplicables a la realidad se mantienen por necesidad analítica, dado que (según él conjetura) es posible reformularlos de tal manera que los objetos asumidos no sean objetos puramente matemáticos, sino objetos abstraídos de la realidad empírica.

A mí solía gustarme citar una frase de Kreisel: “el problema no es la existencia de los objetos matemáticos, sino la objetividad de los enunciados matemáticos”. El hecho es, sin embargo, que el problema de la existencia de los objetos matemáticos no debe ser rechazado como insignificante en relación al de la objetividad en matemáticas. Por el contrario, este problema ha permanecido, y continua siendo la cuestión central de la filosofía de la matemática.

¿De qué estamos hablando, cuando hablamos de los números naturales o de los números reales? Cuando estamos hablando de estas entidades usamos la misma lógica que cuando hablamos de objetos empíricos como personas, estrellas, galaxias, montañas, ríos y cometas: cuantificamos sobre ellas,

usando variables individuales cuyo rango lo constituyen estas entidades, y cuantificamos sobre sus propiedades y sobre funciones definidas sobre estas entidades, usando variables de segundo orden cuyo rango lo constituyen a su vez esas propiedades y funciones. ¿Son los números de cualquiera de estas dos clases, realmente objetos? Si es así, ¿cómo estamos seguros de que existan en cantidad suficiente como para justificar los axiomas que postulamos sobre ellos? ¿Cómo sabemos de su existencia en absoluto? Los matemáticos, por supuesto, prosiguen sencillamente con su trabajo sin preocuparse de estas cuestiones; pero los filósofos tienen el deber de darles respuesta.

La matemática ha tenido siempre un interés crucial para los filósofos debido a que es, o parece ser, la fuente por excelencia de verdades necesarias, aunque en su mayor parte nada triviales. Verdades necesarias triviales, tales como “Una semana tiene siete días”, no constituyen ningún problema; éstas dependen, como es evidente, sólo del conocimiento de los significados de las palabras usadas para expresarlas. Son aquellas verdades que, aun siendo necesarias, no se pueden obtener inmediatamente del conocimiento de lo que las palabras significan, las que nos ponen delante un profundo problema. Las verdades contingentes no son, en sí mismas, enigmáticas: se limitan a registrar cómo encontramos nosotros que es el mundo. Pero ¿qué es para una proposición cuya verdad requiere un complejo proceso intelectual para ser reconocida, el registrar el modo como el mundo *tiene* que ser?

Se han ideado varias formas de eludir este problema. Para los empiristas, para los formalistas y para los neo-hilbertianos, la necesidad matemática no constituye ninguna dificultad, aunque hay otras, directamente relacionadas con ésta, a las que tienen que enfrentarse. No voy a detenerme en explicar por qué no encuentro satisfactoria ninguna de estas estrategias, sino que me dirigiré exclusivamente a aquellos que están dispuestos a aceptar que los teoremas matemáticos son proposiciones genuinas, y por añadidura, proposiciones verdaderas. Si además admiten que, para mostrar la verdad de estas proposiciones no se necesita apelar a hechos establecidos mediante la observación, entonces estarán concediendo que son verdaderas *a priori*. ¿Pueden las verdades sintéticas —aquellas proposiciones que, siendo verdaderas, podrían no haberlo sido— ser conocidas *a priori*? Kripke ha mantenido que esto es bien sencillo: sabemos *a priori* que la Hégira tuvo lugar en el año 1 después de la Hégira, y sin embargo, pudo haber tenido lugar con anterioridad o con posterioridad. Es claro que este fenómeno no es la fuente del carácter *a priori* de los teoremas matemáticos. Por supuesto, Kant tenía una explicación mucho más sofisticada de cómo podemos conocer *a priori* la verdad de ciertas proposiciones que podrían sin embargo no haber sido verdaderas. Si no estamos preparados para aceptar su punto de vista, sólo parece quedar una respuesta disponible, a saber, la respuesta logicista: la necesidad de los teore-

mas matemáticos emana de la misma fuente que la de las verdades lógicas; es necesidad lógica.

No creo que nadie pueda negar el aspecto iluminador que trasluce la explicación logicista de la necesidad matemática, cuando uno la conoce por primera vez. Es cierto que no soluciona todos los problemas, ya que la propia necesidad lógica también requiere alguna explicación. Desde que Gentzen demostró cómo la lógica podía ser formalizada por medio exclusivamente de reglas de inferencia, sin necesidad de asumir ninguna verdad lógica básica, es decir, ningún axioma lógico, ya no estamos obligados a asumir, como hizo Frege, verdades lógicas fundamentales que ni necesitan ni admiten prueba; pero todavía tenemos que explicar qué justifica los principios de inferencia fundamentales que gobiernan nuestro razonamiento. Tenemos, además, que explicar cómo pueden los principios de inferencia deductiva producir resultados informativos. Para que sea válido, las premisas de un paso de inferencia deben, en algún sentido, contener la conclusión; para hacer avanzar nuestro conocimiento, no puede ser que ya la contengan. Podemos decir que la contienen con respecto al *contenido*, pero no con respecto a nuestro *conocimiento* de la verdad de esas proposiciones; pero hacer esto es poco más que ponerle una etiqueta al problema. Así y todo, el reconocimiento de la necesidad matemática como, esencialmente, necesidad lógica, suponiendo que sea correcto, constituiría un gran avance: en efecto, después de todo, los problemas de la inferencia deductiva se nos plantean en cualquier caso, incluso si, supuesto que la necesidad matemática no se considerara una forma de necesidad lógica, no nos viéramos en la necesidad de admitir que la inferencia deductiva puede hacer avanzar nuestro conocimiento en la misma medida en que tenemos que hacerlo, si aceptamos que sí lo es.

No se trata simplemente de que la tesis logicista nos libere de acometer un problema que de cualquier otra manera sería insoluble: lo que ocurre es que, a primera vista, se nos presenta como altamente plausible. Consideremos la casi totalidad de los resultados matemáticos elementales: la proposición de Euler sobre los puentes de Königsberg, por ejemplo; o el teorema de la teoría de la elección social de que no hay un sistema de votación que sea “a prueba de estrategias”, es decir, que pueda ofrecer a cada votante, cualquiera que sea su escala de preferencias, una estrategia de votación elemental; o incluso el teorema fundamental de la aritmética, según el cual cualquier número natural puede ser representado como un producto de números primos de una sola forma (sin importar el orden). ¿Qué es lo que necesitamos para establecer estas proposiciones? Sólo razonamiento ordinario, nada más. Quizá este razonamiento tenga que ser desarrollado durante algo más de tiempo de lo que lo hacemos usualmente; pero no parece que sea de un carácter distinto al razonamiento que practicamos en contextos no matemáticos, o que involucre la apelación a supuestos especiales.

Se pueden hacer objeciones a esta afirmación en los tres ejemplos. Cuando enunciamos el teorema sobre la unicidad de la descomposición en factores primos, hablamos de los números naturales como objetos: parece por lo tanto que se supone algo no implícito en el razonamiento ordinario no matemático, a saber, que existen tales objetos. Pero este supuesto no es esencial. Podríamos enunciar el contenido del teorema hablando sólo de cuántos objetos concretos habría en varios hipotéticos conjuntos finitos, sin tratar los propios números como objetos. Decir que  $p$  es un número primo es decir que un conjunto de  $p$  objetos no puede ser dividido en dos o más subconjuntos disjuntos, con el mismo número de objetos cada uno, y conteniendo a su vez más de un elemento. Decir que  $m = n.k$  es decir que un conjunto de  $m$  objetos puede ser dividido en  $n$  conjuntos disjuntos conteniendo cada uno  $k$  miembros. De esta forma podríamos, haciendo un considerable circunloquio, enunciar el teorema sin referirnos a los números como objetos, y usando en su lugar las variables numéricas de un modo meramente adjetivo. Por lo demás, el teorema no requiere que asumamos que hay infinitos números naturales, o que, para cualquier conjunto finito exista otro de cardinalidad mayor.

Los dos primeros ejemplos suscitan una objeción diferente. Son casos de matemática aplicada, y, como tales, involucran conceptos de carácter no matemático, como puentes y elecciones. Bolzano trabajó para eliminar la intuición espacial y temporal —imaginar las cosas como dispuestas en el espacio o como cambiando en el tiempo— de la teoría de los números reales. Frege continuó la tarea eliminándolas de la teoría de los números naturales, por ejemplo explicando la noción de secuencia en términos de una ordenación arbitraria, no necesariamente espacial o temporal. Es claro que la expulsión de la intuición espacial y temporal de la teoría de números y del análisis es esencial si queremos rechazar la filosofía kantiana de la matemática y mantener que estas dos ramas de la matemática descansan sobre principios puramente lógicos; ya que en caso contrario, donde quiera que se apele a esa intuición, bien pudiera ser que estuviéramos apoyándonos en nuestras suposiciones geométricas o cinemáticas, y no sólo en leyes genuinamente lógicas. Pero incluso para comprender el enunciado del teorema sobre los puentes de Königsberg, y mucho más para seguir el argumento de Euler, ciertamente necesitamos ser capaces de representarnos la disposición de los puentes y de las islas y orillas del río que conectan; y para entender el contenido del teorema de que no hay un procedimiento de votación a prueba de estrategias, necesitamos saber qué es una elección y qué es preferir un candidato a otro.

La objeción es débil. Lo único que muestra es que la matemática aplicada está, por lo general, aplicada a un objeto de estudio no matemático. La tesis logicista se refiere, no a los resultados de aplicar la matemática, sino a la matemática pura; y los contenidos puros de estos teoremas no requieren que

estemos familiarizados con las circunstancias empíricas a las que pueden ser aplicados. El teorema sobre los sistemas de votaciones a prueba de estrategias, cuando se expresa en su versión abstracta, se refiere a conjuntos finitos sobre los que se ha definido una cantidad finita de órdenes lineales: el interés del teorema radica en tomar estos órdenes como relaciones de preferencia, tal y como se hace al aplicarlo a la teoría de votaciones, pero no es algo esencial a su contenido o a su prueba. Del mismo modo, el problema de los puentes de Königsberg puede ser expresado en términos de un conjunto de siete elementos (los puentes) y otro de cuatro (las regiones que éstos conectan), más una relación que exista entre cada “puente” y dos de las “regiones”; un “trayecto” será una secuencia finita de puentes que satisfaga unas condiciones obvias. Para presentar las relaciones entre “puentes” y “regiones” es útil un diagrama: no es esencial al argumento.

Cuando consideramos ejemplos sencillos como éstos, la impresión de que la prueba matemática es simplemente una forma de deducción lógica nos asalta como enormemente plausible. Y sin embargo el logicismo es una doctrina generalmente desacreditada. Incluso su primer defensor notable, Gottlob Frege, vino a considerar que era errónea; hoy en día no hay virtualmente nadie que sea un logicista incondicional. ¿Por qué esto es así? ¿Qué se ha mostrado que fuera erróneo en esta explicación de la necesidad matemática?

Fue precisamente el reto de justificar nuestra creencia en la existencia de los objetos matemáticos lo que derrotó a Frege. Términos para números naturales, como “3”, y para números reales, como “ $\pi$ ”, cumplen los más claros criterios para ser términos singulares; la cuantificación sobre números naturales o sobre números reales cumple los más claros criterios para constituir cuantificación de primer orden. No se sigue que los primeros sean realmente términos singulares o que la segunda sea realmente cuantificación de primer orden: hay oraciones de las que, aunque aparentemente involucran referencia a números naturales o reales, o cuantificación sobre ellos, se puede defender que su estructura superficial es engañosa, y que en realidad son formas encubiertas de oraciones cuya composición lógica es bien distinta. Frege, sin embargo, no vio razón para dejar de tomarlas con su significado literal: así, clasificó los números naturales y reales como objetos que entraban en el dominio de las variables de cuantificación de primer orden. Este punto de vista resulta inaceptable, por supuesto, para los nominalistas como Hartry Field, dado que si los números son objetos, entonces son objetos abstractos, y los nominalistas abominan de los objetos abstractos. Para Frege, esta reacción era supersticiosa. Los objetos, de acuerdo con él, se pueden clasificar en actuales y no actuales; era, para él, de vital importancia el reconocimiento de la existencia de objetos no actuales junto con la de los actuales, una existencia absolutamente tan objetiva como la de los objetos actuales. El fracaso en reconocer esto se debía, según él, a un fracaso en entender que sólo en el con-

texto de una oración podemos referirnos a un objeto, actual o no actual: lo que se necesita para garantizar que estamos genuinamente hablando de objetos de cualquiera de estos dos tipos es que hayamos especificado, de forma legítima y no circular, las condiciones de verdad de las oraciones en el transcurso de las cuales nos referimos a ellos. Éste es su célebre “principio contextual”. Uno de sus persuasivos ejemplos de un objeto que no es actual, pero sí totalmente objetivo, era el Ecuador. Si, por consiguiente, los números naturales y los números reales son objetos (no actuales), la cuestión de cómo sabemos que hay tales objetos, y que hay una cantidad enumerable de los primeros y una cantidad de los segundos equivalente al continuo, se vuelve apremiante.

Por añadidura, si las verdades de la teoría de números y del análisis van a depender solamente de los principios de la lógica, la respuesta a esta cuestión deberá apelar sólo a esos principios: los números deben ser, no sólo objetos no actuales, sino además, a diferencia del Ecuador, objetos *lógicos*. Es bien sabido cómo estas conclusiones llevaron a Frege al desastre. Decidió que todos los objetos lógicos pueden ser presentados en la forma de recorridos [*Werläufe*]. Un recorrido es una función considerada extensionalmente, y era, para Frege, un objeto, perteneciente al dominio de las variables individuales; la noción de un recorrido le pareció a él una noción que pertenecía evidentemente a la lógica. Efectivamente los libros de lógica reconocían los predicados como teniendo intensiones y extensiones, donde las extensiones eran clases. Al tratar los dos valores veritativos, que eran la referencia de las oraciones, como objetos en este sentido también, y a los predicados monarios como refiriéndose a funciones de objetos a valores de verdad, una clase podía ser entendida como un tipo particular de recorrido; la noción de recorrido aparecía por tanto como una mera generalización de la de clase.

Esto reducía el problema de la existencia de los números y de los objetos matemáticos de cualquier clase a la existencia de entidades como los recorridos. A su vez ésta había de ser solventada apelando al principio contextual: la existencia de entidades como los recorridos quedaría asegurada si pudiera encontrarse un procedimiento para determinar las condiciones de verdad de cualquier oración que involucrara referencia a ellas, o cuantificación sobre ellas. Es notorio que parte del método ensayado por Frege para este propósito, que recogió en un axioma de su sistema formal, conducía a una contradicción.

Prácticamente todo el mundo, incluido el propio Frege, ha concluido desde entonces que esta forma de enfocar el problema estaba del todo equivocada; el logicismo fue rechazado porque el intento de Frege de establecerlo había sido un notable fracaso. Y sin embargo nadie hasta ahora ha propuesto una respuesta alternativa plausible a las dos preguntas que Frege había intentado responder:

- (1) ¿Cuál es el fundamento de la necesidad de los teoremas matemáticos?
- (2) ¿Cómo se puede justificar nuestra creencia en la existencia de los números naturales y reales —y, en general, de los objetos de las teorías matemáticas fundamentales—?

Crispin Wright ha intentado rehacer la respuesta de Frege a esta segunda cuestión, un intento íntimamente relacionado con nuestra investigación; casi nadie más intenta siquiera abordarla. Y lo mismo puede decirse de la pregunta sobre la necesidad matemática. El logicismo ofreció lo que parecía ser una respuesta convincente; el logicismo ha sido rechazado, y la cuestión —la causa original del interés de los filósofos en la matemática— sigue sin una respuesta clara, y mucho menos una convincente.

La caracterización de Frege de los objetos no actuales coincide precisamente con la caracterización estándar que se da en la actualidad de los objetos abstractos: que no sean activos causalmente, es decir, que carezcan de poderes causales. Por ejemplo, el ecuador es algo que no puede verse, o con lo que uno pueda tropezar. Esto lo usan los nominalistas como un motivo para no creer en la existencia de los objetos abstractos: puesto que no tienen poderes causales, el mundo sería exactamente igual si no existieran, y por lo tanto no tenemos razones para suponer que de hecho existan. Pero esta caracterización es inadecuada; el propio Frege tuvo dificultades al aplicarla a las proposiciones (que él llamaba “pensamientos”). Alguien puede creer una proposición, y esta creencia puede influenciar su conducta: por tanto, ¿no ha tenido la proposición un efecto causal remoto sobre sus acciones? Por poner un ejemplo más pedestre, un alto tipo de cambio puede causar una caída en el nivel de exportaciones: si el ecuador es un objeto abstracto, ¿no son también objetos abstractos un tipo de cambio y un nivel de exportaciones? Un materialista puede proponer caracterizar los objetos abstractos como aquellos que no están compuestos de materia o que no emanan de la materia; pero esto es una falacia conceptual. Un fantasma no es un objeto abstracto; ni tampoco lo son los ángeles; ni lo es Dios. El materialista no cree que los fantasmas o los ángeles existan, ni tampoco que Dios exista, pero ésta no es la cuestión: el *concepto* de un fantasma, o de un ángel, o de Dios, no es el concepto de un objeto abstracto, sino sólo de un objeto inmaterial. Lo mismo se aplica a objetos puramente visuales, tales como el arco iris, el cielo y la aurora boreal. Y muchas otras cosas son difíciles de clasificar. ¿Es un país un objeto abstracto? Bueno, sus límites no están necesariamente donde se encuentran los guardias fronterizos, sino que vienen determinados por tratados internacionales; uno no puede tropezarse con ellos, desde luego. ¿Es un partido de tenis un objeto abstracto? Puede ser contemplado, lo que podría llevarnos a incluir a los acontecimientos en la supercategoría de los objetos concretos, amplia-

mente considerada; pero también la dirección del vuelo de un pájaro puede ser observada, y las direcciones son ciertamente objetos abstractos.

Reflexionando sobre estos ejemplos acabamos por darnos cuenta de que no hay, como pensó Frege, y como creen tantos filósofos contemporáneos, una línea precisa de demarcación entre los objetos concretos y los abstractos, o entre los actuales y los no actuales. En su lugar, hay una multitud de clases diferentes de objetos de los que nosotros hablamos, sometidos a una gran variedad de principios —principios gramaticales, en el sentido de Wittgenstein—, relativos a lo que puede ser predicado de ellos con sentido, a cuáles son sus criterios de identidad, a si se puede decir que están compuestos de algo, y, si es así, de qué, a si pueden entrar en interacciones causales, etcétera. El problema general de los objetos abstractos no existe. Pero el principio contextual de Frege es válido para objetos de todas clases: saber en qué consiste referirse a ellos es saber qué haría verdaderas a oraciones con sentido que contuvieran términos singulares que los denotaran.

Pero ¿qué pasa, entonces, de los objetos matemáticos? Si consideramos que las proposiciones matemáticas se relacionan con ellos, de la misma forma que las proposiciones ornitológicas están relacionadas con pájaros, entonces dado que las proposiciones matemáticas verdaderas son verdaderas necesariamente, los objetos matemáticos deben existir necesariamente. La noción de objeto que existe necesariamente es desconcertante; pero la explicación logicista de la necesidad matemática, si se puede sostener, disuelve la perplejidad; en ese caso, los objetos matemáticos deben existir por necesidad *lógica*. De acuerdo con el principio contextual, la referencia a los números naturales, por ejemplo, debe explicarse especificando las condiciones de verdad de los enunciados que contengan tal referencia. Las condiciones de verdad de algunos de estos enunciados al menos, pueden ser expresadas usando los correspondientes cuantificadores numéricos definidos, como “Hay exactamente tres ...”. Nosotros no sentimos reparo en decir que hay tal cosa como el existir tres objetos de cierta clase (donde los objetos se reconocen como siendo de una clase si hay algo que es cierto de todos ellos —algo que todos ellos son—); ni tampoco, por supuesto, que no podría dejar de haber tal cosa como el existir tres objetos de cierta clase. ¿Por qué, entonces, deberíamos extrañarnos tanto cuando decimos que no podría dejar de existir un objeto como el número tres? ¿O como el número 3.000.000.003, si se quiere?

¿Cuál es la base para decir que hay tal cosa como el existir tres objetos de cierta clase? Bien, podemos dar multitud de ejemplos de clases de objetos de los que hay tres ejemplares. ¿Podemos decir con la misma base que hay tal cosa como el existir 3.000.000.003 objetos de cierta clase? Claramente no; y sólo tenemos que aumentar el número en cuestión para que la respuesta sea “Seguro que no”. El criterio para la verdad de enunciados del tipo “Hay tal cosa como el existir ...”, es poco claro. Desde luego un enunciado así es



verdadero si podemos dar ejemplos de lo que esté en cuestión; el que pueda ser verdad incluso si no hay ejemplos es problemático. Frege tenía una respuesta elegante. Una clase de objetos de la que ciertamente hay 3.000.000.003 es aquella a la cual un objeto pertenece si es uno de los números naturales del 0 al 3.000.000.002: ésa era la base de su prueba de que, para cada número natural, hay un número natural mayor que él. Pero es dudoso que podamos apelar de este modo a los predecesores de un número cuando estamos en el proceso de justificar el paso de hablar de la existencia de  $n$  objetos de cierta clase a hablar de  $n$  como siendo él mismo un objeto, y por tanto un objeto que existe necesariamente; en tal caso estaríamos asumiendo precisamente aquello que estábamos intentando establecer.

De algunos objetos de un carácter marcadamente abstracto puede decirse que han sido abstraídos de la realidad empírica. Con esto no quiero decir que hemos llegado a ellos, o a concebirlos, mediante el proceso psicológico de observar algo y entonces dejar de atender a cualquier otro aspecto excepto uno, en ese algo: un número considerable de matemáticos y filósofos del siglo diecinueve creían en este proceso, y apelaban a él en el transcurso de sus explicaciones, pero es totalmente espurio. No quiero decir, por ejemplo, que lleguemos a la concepción del número 3.000.000.003 observando una colección de 3.000.000.003 objetos y prestando atención sólo a cuántos de ellos hay. Lo que quiero decir es simplemente que los enunciados que mencionan tales objetos sirven para caracterizar ciertos estados de cosas empíricos. Podemos por lo tanto explicar los significados de los términos para objetos abstraídos de la realidad empírica en este sentido, por referencia a tales enunciados. La existencia de tales objetos se puede entonces juzgar como algo contingente en relación con la ocurrencia de estados de cosas de la clase en cuestión. Por ejemplo, la existencia del ecuador de la Tierra depende del hecho de que la Tierra gira, en lugar de, digamos, ir dando tumbos. Una vez que aceptamos el principio contextual no tiene por qué haber dificultad sobre la existencia de objetos abstraídos de la realidad empírica. Esto incluye claramente los números cardinales de totalidades finitas cuyo tamaño podemos determinar o estimar; pero, puesto que no sabemos que el universo sea ni espacial ni temporalmente infinito, eso no basta en sí mismo para darnos la secuencia entera de los números naturales, ni mucho menos los cardinales transfinitos.

Hay un contraste notable entre dos intentos, que son casi contemporáneos, de dar un fundamento a la teoría de números: el de Dedekind y el de Frege. El método de Dedekind consistía en caracterizar la estructura abstracta de la secuencia de los números naturales. No pensaba, como lo hace su reciente seguidor, Paul Benacerraf, que, al hablar de los números naturales, estamos hablando sobre cualquier secuencia que tenga su misma estructura; pensaba que hay unos objetos específicos que constituyen *los* números natu-

rales a los cuales nosotros nos referimos. Su método de llegar a ellos fue, en primer lugar, considerar una secuencia concreta que tuviera esta estructura, y después aplicar el proceso de abstracción psicológica para llegar a la secuencia abstracta de los números naturales, cuyos términos, así obtenidos, no tienen ninguna propiedad excepto sus posiciones respectivas en esa secuencia. Por supuesto que admitía la capacidad de los números naturales para servir como números cardinales finitos, pero sólo como un corolario a la construcción inicial de la secuencia que estos constituían y las propiedades de esa secuencia.

Para Frege la matemática no trata, como Dedekind supuso, con estructuras puramente abstractas: nociones matemáticas fundamentales, tales como la de *número natural* y la de *número real*, deben ser explicadas en términos del principio que regule todas sus aplicaciones posibles. La aplicación de los números naturales se efectúa tratándolos como números cardinales (finitos): para caracterizarlos, debemos explicar simultáneamente el operador “El número de objetos  $F$ ”, donde “ $F$ ” puede ser reemplazado por alguna expresión predicativa como “luna de Júpiter”; los números naturales deben entonces ser presentados como los valores de este operador.

Como ya se ha mencionado, Frege intentó, en su obra magna *Los principios fundamentales de la aritmética*, asegurar la existencia de entidades como los recorridos, que incluían a las clases como un caso especial, y que según Frege había concluido comprendían todos los objetos lógicos, apelando al principio contextual. Su procedimiento no consistió en especificar primero el dominio de las variables individuales de su teoría formal, y después precisar la denotación de términos como los recorridos en ese dominio: intentó fijar el dominio *mediante* la fijación de las denotaciones de esos términos. El principio contextual le liberó de la necesidad de fijar sus denotaciones por estipulación directa: en su lugar, éstas habrían de ser fijadas especificando las condiciones para que dos términos tuvieran la misma denotación. Esta condición fue convertida en un axioma, el célebre Axioma V de la teoría formal de Frege. La condición para que un término de este tipo tuviera la misma denotación que un término de algún otro tipo, era determinada reconstruyendo todo a lo que se podía hacer referencia en la teoría como un recorrido (si no era de por sí un recorrido, debía ser tomado como idéntico a su propia clase unitaria). Este intento desgraciadamente fracasó: la teoría así obtenida resultó ser inconsistente.

En su anterior libro *Los fundamentos de la aritmética*, Frege había acariciado la idea de introducir términos para números cardinales, formados aplicando el operador de cardinalidad “El número de ...”, de la misma forma, a saber, especificando cuándo dos de esos términos, “El número de objetos  $F$ ” y “El número de objetos  $G$ ”, denotaban el mismo número. Lo harían, en concreto, si y sólo si había una función uno a uno de los objetos  $F$  en los  $G$ : nosotros podemos llamar a esto el “principio de cardinalidad”. Frege rechazó

este procedimiento como un método para introducir el operador de cardinalidad, porque no fue capaz de resolver el problema de determinar la condición bajo la cual un término para un número cardinal denotaba el mismo objeto que un término de algún otra forma. Éste es el problema conocido como problema de Julio César: ¿sobre qué nos podemos apoyar para mostrar que Julio César no es el número 3? Frege recurrió por tanto a definir “El número de objetos  $F$ ” como “la clase de propiedades  $G$  tal que existe una función uno a uno de los objetos  $F$  en los  $G$ ”. Pero usó esta definición solamente para derivar de ella el principio de cardinalidad; y entonces mostró cómo, apelando únicamente al principio de cardinalidad, conjuntamente con las definiciones apropiadas, todos los principios básicos de la aritmética podían ser derivados en lógica de segundo orden, incluyendo los principios de que todo número natural tiene un sucesor, y que, si los sucesores son iguales, los números son iguales, es decir, que hay infinitos números naturales.

Crispin Wright ha defendido que Frege debería haberse quedado satisfecho con introducir los números naturales por medio del principio de cardinalidad. Crispin Wright asume que el problema de Julio César puede solucionarse, y mantiene que la introducción de un operador para formar términos por medio de lo que llama un “principio de abstracción” está (casi) siempre justificada. Un principio de abstracción especifica las condiciones de verdad para un enunciado de identidad que conecte dos términos formados por medio del operador, en términos de la existencia de una relación de equivalencia entre las denotaciones de las expresiones en las cuales opera. Por tanto, el principio de cardinalidad es un principio de abstracción en este sentido: los dos términos se forman adjuntando el operador de cardinalidad a dos predicados, y la relación de equivalencia entre las propiedades que denotan es la de que hay una correlación uno a uno entre los objetos que tienen esas propiedades (donde las propiedades se entienden extensionalmente). El Axioma V, que enuncia el criterio de identidad para recorridos, es también un principio de abstracción, en el cual la condición es que las funciones denotadas por las expresiones funcionales a las que el operador de recorrido se asigna sean coextensas. Wright impone algunas restricciones diseñadas para excluir principios de abstracción inconsistentes como el Axioma V. De acuerdo con Wright, al especificar un principio de abstracción hacemos algo más que asegurar un *sentido* para el operador de formación de términos en cuestión. Aseguramos una *referencia* para los términos formados por medio de él, garantizando la existencia de los objetos que estos términos denotan.

Esta tesis es fregeana en cuanto que transfiere aquello que Frege creía acerca de su principio de abstracción para entidades como los recorridos, antes del descubrimiento de la contradicción, al principio de abstracción para números cardinales, y después lo generaliza. No es fregeana en que presta poca atención al problema de Julio César, y en que le falta la base que el pro-

pio Frege creía tener para el principio de abstracción para entidades como los recorridos. Frege creía erróneamente que, por medio de este principio, había determinado la verdad o falsedad de cualquier oración de su teoría que contiene un término para recorridos; esto justificaba una apelación al principio contextual como lo que garantiza una referencia para todos esos términos. Wright, correctamente, niega que un principio de abstracción determine la verdad o falsedad de todas las oraciones de este tipo; es, por tanto, obscuro qué base tiene Frege para lo que mantiene. Ésta, sin embargo, es la postura neofregeana. Los neofregeanos no defienden el carácter analítico de un principio de abstracción que se ajuste a la restricción diseñada para excluir la contradicción; pero es algo que siempre tenemos la libertad de postular. Garantiza que los objetos matemáticos son objetos genuinos, a los cuales nos referimos en un sentido tan robusto de “referir” como aquel en que nos referimos a objetos de cualquier otra clase. No necesita justificación, excepto la prueba de que la supuesta relación de equivalencia lo es, en efecto. En particular, no tenemos que especificar de antemano un dominio de objetos sobre los que tendrá que cumplirse el principio de abstracción: al especificar el principio, *en ese mismo acto* caracterizamos tal dominio; Frege estaba muy acertado en creer que debía especificar las referencias de sus términos para recorridos por medio de un principio de abstracción y dejar el dominio de sus variables individuales al paio. Además, la legitimidad del principio de abstracción no depende de hechos de experiencia o de la intuición espacial, temporal o de ningún otro tipo. Los neofregeanos no mantienen, por tanto, que la necesidad de la matemática sea simplemente necesidad lógica, ya que no es exactamente la *lógica* la que asegura nuestro derecho a postular principios de abstracción. Pero es cercana a la necesidad lógica, en que depende de una estipulación sin ningún presupuesto previo.

La doctrina neofregeana tiene un gran encanto: intenta proporcionar soluciones a problemas que otras filosofías de la matemática o bien ignoran o para los que sólo proporcionan formas de eludirlos. El uso de un operador de formación de términos aplicado a predicados implica la existencia de una función de propiedades a objetos; por tanto, el principio de cardinalidad, desde el cual Frege mostró cómo derivar los principios fundamentales de la teoría de números, viene a equivaler a la proposición de que hay una función de propiedades a objetos cuyos valores son idénticos si y sólo si hay una función uno a uno de los objetos que tienen una propiedad a los que tienen la otra. Llamemos a esto la proposición primordial. Una objeción natural es que la prueba de la infinitud de los números naturales desde la proposición primordial es circular. La proposición primordial puede ser satisfecha sólo en un dominio al menos enumerable; se suponía que la prueba debía establecer, como si dijéramos por primera vez, la existencia de una totalidad enumera-

ble, mientras que la existencia de tal totalidad ha sido presupuesta tácitamente asumiendo la verdad de la proposición primordial.

Los neofregeanos deben negar que se ha pedido la cuestión de esta manera. ¿Cómo, de acuerdo con ellos, conseguimos la hazaña de garantizar la existencia de un dominio infinito que contenga los números naturales por medio de una estipulación libre de cualquier presupuesto? De acuerdo con Wright, esto se consigue asumiendo en primer lugar la legitimidad de la cuantificación sobre el dominio que comprende absolutamente a todos los objetos. Por supuesto, cualquiera que ya tiene el concepto de los números naturales, considerados como objetos, y que reconoce que hay infinitos números naturales, considerará los números naturales como pertenecientes al dominio de absolutamente todos los objetos, y tomará por tanto tal dominio como infinito enumerable, por lo menos. Pero los neofregeanos representan el principio de cardinalidad como una forma de *introducir* el concepto de número natural, y al mismo tiempo la noción de “enumerablemente muchos” a alguien que previamente los ignore; instruido en el principio de cardinalidad, que reconoce como un tema legítimo para la estipulación, aprende por primera vez qué es considerar una totalidad como infinita, y se viene a convencer de que el dominio de todos los objetos es una totalidad de este tipo. Su concepción inicial del dominio de todos los objetos debe por consiguiente ser altamente rudimentaria. De acuerdo con Wright, se la representa como conteniendo todos los términos de objetos que se han introducido o pueden aún ser introducidos por medios legítimos, incluyendo términos para objetos lógicos y para objetos abstractos no abstraídos de la realidad empírica; llamemos a estos últimos “cuasi-lógicos”.

El estado de ánimo de este individuo parece tan sospechoso, como el de aquél que está a punto de encontrarse y las paradojas de la teoría de conjuntos y quedarse desconcertado por ellas. ¿Por qué no debería suponer que el conjunto de todos los objetos es también un objeto genuino (y, por tanto, un miembro de sí mismo), y que todos los subconjuntos de un conjunto dado son también objetos genuinos? La única respuesta que cabe es que los conjuntos no han sido introducidos por medio de un principio de abstracción válido. Puede mostrar fácilmente que no puede haber una correspondencia entre todas las propiedades de objetos y los objetos de tal forma que sólo las propiedades coextensas se pongan en correspondencia con el mismo objeto: *por tanto* ese principio de abstracción sería ilegítimo. El neofregeano debe mantener, no sólo que todos los principios de abstracción legítimos introducen objetos genuinos, sino que los *únicos* objetos cuasi-lógicos son aquellos introducidos por principios de abstracción legítimos. Pero ¿qué razón se puede esgrimir para esto? ¿No fue una de las lecciones de las paradojas que no *podemos* cuantificar inteligiblemente sobre todos los objetos que han sido o pueden aún ser introducidos, o incluso sobre todos los números ordinales, to-

dos los cardinales o todos los conjuntos? ¿Por qué no debería el individuo al que se reconoce una comprensión de la cuantificación sobre todos estos objetos llegar a la misma conclusión? Supongamos que él se reconoce a sí mismo una comprensión de la cuantificación sobre todos los objetos introducidos por medio de principios de abstracción legítimos. Convencido de que no puede presuponer que este dominio —llamémosle  $D_0$ — contiene todos sus subconjuntos, ¿por qué no podría concebir un dominio mayor  $D_1$  que contuviera todos los elementos de  $D_0$  y además todos los subconjuntos de  $D_0$ ? ¿Y que puede llevar a cabo extensiones de este tipo tanto como quiera? Ha descubierto la existencia de conceptos infinitamente extensibles; y no ha cometido falacia alguna.

¿Qué restricción sobre los principios de abstracción puede servir para evitar la inconsistencia? George Boolos ha llamado la atención sobre principios de abstracción que, aunque consistentes en sí mismos, son inconsistentes entre sí, siendo uno de ellos satisfacible sólo en dominios finitos, y el otro sólo en dominios infinitos. Wright está dispuesto a descartar los principios del primer tipo, admitiendo únicamente principios de abstracción satisfacibles en dominios infinitos; pero, como ha observado William Demopoulos, esto está peligrosamente cercano a la circularidad de la que tratábamos de escapar. No obstante, una vez que se ha admitido la noción de un concepto extensible indefinidamente, no puede probarse que un dominio de todos los objetos, ya concebido, aunque de una forma rudimentaria, contiene infinitos números naturales. Aquél a quien el neofregeano trata de convencer de esto, tiene la posibilidad, cuando se le presenta la prueba de Frege de que todo número natural tiene un sucesor, de decir que lo que esta prueba muestra es que, dado un dominio cualquiera de objetos, en el cual hay números naturales el mayor de los cuales es el número natural  $n$ , se puede especificar un dominio de objetos más extenso, que contenga el número natural  $n+1$ . La prueba le ha enseñado a contemplar *número natural* como un concepto extensible indefinidamente.

Frege trató de solucionar un problema fundamental que pocos otros filósofos de la matemática se han planteado siquiera. Ha merecido la pena por lo tanto examinar en detalle la defensa neofregeana de una versión revisada de su fundamentación de la aritmética. El hecho es que esta defensa no puede tener éxito. No puede tener éxito porque no hay un concepto válido de *objeto* que cubra no sólo todos los objetos empíricos y todos los objetos abstraídos de la realidad empírica sino, por adelantado como si dijéramos, todos los objetos matemáticos que pueden ser legítimamente concebidos en cualquier momento. No es que no haya objetos matemáticos, sino sólo que nosotros no podemos abarcar con nuestro pensamiento la totalidad de todos aquellos objetos que concebiremos o podremos concebir. Además, Frege y Wright comparten una falsa concepción de aquello en lo que consiste el ser un objeto matemático. La noción fregeana de referencia a objetos pierde su robustez

cuando hablamos de objetos matemáticos: la idea aparentemente elemental de que un objeto es cualquier cosa a la que nos refiramos con una expresión cuyo funcionamiento lógico sea el de un término singular, no sostendrá el peso que se pone sobre ella cuando los términos sean términos matemáticos.

Esto resulta evidente cuando nos preguntamos qué hace verdadero o falso a un enunciado que involucre una cuantificación sobre un rango de objetos dado. Si el rango en cuestión consiste en objetos físicos, como cometas —u objetos empíricos en general— entonces es su *realidad* lo que hace a tal enunciado verdadero o falso. Nuestra tarea queda terminada cuando hemos especificado qué hace de un objeto un miembro de ese rango, y cuándo dos formas de referirse a estos objetos seleccionan al mismo objeto. Una vez hecho esto, podemos dejar que la realidad determine si sucede o no que todos los objetos de ese rango tengan cierta propiedad, o si sucede o no que hay uno o más de ellos con alguna otra. Esto no es así con objetos matemáticos, como números reales, por ejemplo. Podemos postular que un número real es algo que tiene con cada racional una relación determinada de magnitud comparativa; y podemos postular que dos formas de determinar un número real seleccionan el mismo número real si sus denotaciones son menores que los mismos racionales exactamente. Pero estas estipulaciones no bastan por sí mismas para determinar la verdad o falsedad de cualquier enunciado que involucre cuantificación sobre los números reales. Tenemos, además, que especificar *qué números reales hay*: no podemos dejar la determinación de este extremo a la realidad. Se puede decir que cada número real corresponderá con una forma de hacer un corte en la recta racional: pero esto deja abierta aún la cuestión de qué formas hay de hacer tales cortes. Hablar de objetos físicos y hablar de objetos matemáticos son dos usos del lenguaje muy distintos. Esta diferencia entre objetos empíricos y matemáticos nos aparece con claridad cuando consideramos la cuestión de si existen grandes cardinales de cierto tipo. Una consideración muy importante es la de si es consistente asumir que existan; pero, suponiendo esa consistencia, ¿qué nos estamos preguntando cuando nos preguntamos si existen esos cardinales? Si existen o no galaxias con tal o cual propiedad física es algo que corresponde a la realidad decidir; es un asunto sobre cómo son las cosas, o cómo resulta que son. Pero ¿decide la realidad si hay o no números cardinales con tal o cual propiedad conjuntista? ¿O debemos decir, con Hilbert, que, si se puede suponer consistentemente que un dominio de objetos matemáticos existe, entonces *existe*? ¿O nos corresponde, más bien, a nosotros, el especificar lo que queremos considerar como existente?

La matemática no trata sobre una pura estructura, como Dedekind y sus seguidores de hoy han supuesto. El número 4 no es, como ha mantenido Benacerraf, caracterizable sola y exclusivamente por su posición en la secuencia básica  $\omega$ . Es el cuarto miembro de la secuencia  $\omega$  que empieza por 1, y el

quinto miembro de la secuencia  $\omega$  que empieza por 0: las dos secuencias han sido tomadas como básicas por diferentes autores. ¿Cómo hay que distinguir estas dos secuencias isomórficas? ¿Qué es para una de ellas empezar por 1 y para la otra empezar por 0? Ahora bien, el primero de estos números da el número de satélites naturales de la Tierra, y el segundo el número de satélites de Venus: es por sus *aplicaciones* por lo que distinguimos entre unos números naturales y otros. La visión estructuralista de la matemática hace de sus aplicaciones una cadena de milagros repetidos: las estructuras que nosotros concebimos resultan una y otra vez estar ejemplificadas en la naturaleza. El enfoque de Frege explica estos milagros aparentes: los objetos de una teoría matemática dada deben ser caracterizados desde fuera, en términos de aquel principio general que hace posibles las aplicaciones de esa teoría.

No estoy seguro de hasta dónde se puede llevar esta tesis metodológica. El álgebra abstracta es ciertamente una rama de la matemática que trata sobre estructuras: ¿debe explicarse la noción de grupo en primer lugar en términos de transformaciones, o es aceptable explicarla en el modo puramente abstracto o axiomático que se adopta usualmente en nuestros días? La metodología de Frege no es, desde luego, una cuestión simplemente de convertir algún teorema de representación en una definición: debemos encontrar el modo de representación más *general*, al cual se apelará en cualquier aplicación que hagamos o que podríamos hacer en cualquier momento futuro. Pero, por lejos que deba llevarse el principio metodológico de Frege, es ciertamente correcto para la teoría de números y para el análisis, la teoría de los números naturales y la de los números reales respectivamente. Antes de que aprendamos nada de matemáticas, ya estamos familiarizados con los números naturales como respuestas a la pregunta “¿cuántos?”; y eso es, en definitiva, lo que esencialmente son.

Tal y como están las cosas, prácticamente todos los adultos conciben la secuencia de los números naturales como infinita; poco después de que hayan aprendido a contar, a los niños, al preguntar cuál es el número más grande, se les ha explicado que para cualquier número que puedan escoger, siempre habrá otro número una unidad mayor que ése. Puede que haya habido un estadio en la historia de la raza humana sin embargo, antes de que se comprendiera la infinitud de la secuencia numérica. El uso de una notación que no permite la representación de números naturales arbitrariamente grandes propicia una etapa así. Los numerales romanos, por ejemplo, requieren el suplemento de símbolos especiales, I, V, X, L, C, D, M, y por esta razón, en un momento dado sólo son capaces de representar un segmento inicial finito de la secuencia numérica. Lo mismo vale para aparatos mecánicos como ábacos, calculadoras mecánicas, o incluso, según parece, un programa de ordenador para fechas: cada uno tiene un extremo superior que no puede sobrepasar. En tal estadio, sólo se mencionarían aquellos números que tuvieran algún uso



para decir cuántas cosas había de cierta clase dada. Habría, sin duda, sólo una vaga idea de los números situados entre, digamos, el 10.000 y el 10.500: el reconocimiento de que ese intervalo contenía tantos miembros como el intervalo del 0 al 500, sin que nunca se hubiera nombrado a ninguno de esos miembros. Pero en este estadio, cada uno de los números naturales considerados en un momento u otro podría decirse que estaba extraído de la realidad empírica. Su existencia y nuestra capacidad para referirnos a ellos no constituirían un problema; ambas cosas vendrían justificadas y explicadas por el principio contextual. Podemos considerar con razón que todas las verdades aritméticas conocidas entonces sobre estos números lo son por necesidad lógica; su contenido podría, después de todo, ser captado por verdades de lógica de tercer orden expresadas por medio de cuantificadores numéricos definidos y variables cuyo rango fuera las denotaciones de los cuantificadores de primer orden.

Cualquier forma de comprender un número cardinal debe incluir una comprensión tácita de la equivalencia cardinal, como se puede explicar en términos de correspondencias biunívocas. Un niño, o incluso un adulto, al que se le pregunta cómo se podría decir que hay exactamente tantas cosas de un tipo como de otro, puede muy bien responder que debe contarse cada grupo y ver si llega al mismo número en los dos casos. Ésta fue, después de todo, esencialmente la respuesta de Husserl. Pero si un niño que ha aprendido a contar, y después de haber comprobado que hay 13 chokolatinas en un tarro, no puede entender lo que su madre quiere decir cuando dice “Habrá bastantes” refiriéndose a una fiesta en la que se reunirán un total de 13 niños, entonces no se le atribuirá una comprensión completa de lo que significa decir que hay 13 chokolatinas.

No han sido los matemáticos los que han operado la transición hacia la concepción de la secuencia numérica como algo que no tiene fin; hace mucho tiempo que esto es parte de nuestro concepto cotidiano de número (natural). Y sin embargo la concepción en sí misma es matemática: la transición nos lleva desde objetos abstraídos de la realidad empírica a objetos indiscutiblemente matemáticos; es decir, a una totalidad de objetos que forman el dominio de una teoría matemática. Se da, por tanto, la transición de un rango de objetos abstractos cuya existencia puede ser establecida apelando al principio contextual a un dominio de objetos cuya existencia no puede establecerse de la misma manera. En el sentido ordinario de “existir”, que se aplica igualmente tanto a objetos concretos como a aquellos abstraídos de la realidad empírica, no se puede en absoluto afirmar que los objetos puramente matemáticos existan. Nosotros no afirmamos, como creía Frege, y como cree Wright, la existencia de objetos abstractos que existen independientemente del hecho de que nosotros pensemos en ellos. Más bien sucede que  *fingimos*  la existencia de una totalidad así: construimos un modelo mental de ella.

Aquellos que, como Dedekind, han dicho que los objetos matemáticos son “libres creaciones de la mente humana” iban por el camino correcto. La expresión “libre creación” sugiere el uso de una imaginación sin límites, mientras que lo que nosotros hacemos en tales casos es extender una concepción de objetos abstractos ya inteligible. Es precisamente porque nuestro modelo mental es una extensión de un rango de objetos abstraídos de la realidad, por lo que nuestra habilidad para aplicar la teoría matemática que tiene a ese rango como objeto de estudio está exenta de problemas; pero la existencia de los nuevos elementos de la realidad extendida no está justificada por nada. No están abstraídos del mundo exterior; su existencia no está garantizada por ningún principio general de abstracción. Simplemente se *conciben*.

Es por esta razón por la que, cuandoquiera que formamos un modelo mental de este tipo para servir como el dominio de una teoría matemática, necesitamos especificar qué elementos contiene: no podemos dejar a la naturaleza, o a la realidad, el determinar cuáles y cuántos hay. Tenemos que postular, con la precisión que sea necesaria, qué números ordinales, o qué números reales, concebimos que están contenidos en el dominio de nuestra teoría. Una vez hecho esto, entonces naturalmente nosotros nos preguntamos si un número ordinal o real que satisfaga ciertas condiciones dadas existe; pero entonces estamos usando un sentido matemático de “existe”, queriendo decir “existe en nuestro modelo”, y no el sentido elemental, ordinario.

Cuando nos forjamos una concepción del dominio de una teoría matemática fundamental, introducimos la noción de una totalidad con alguna cardinalidad infinita; dos de estos dominios no pueden tener la misma cardinalidad, ya que en tal caso uno de ellos podría ser construido desde el otro, y las dos teorías no serían fundamentales. Al hablar y pensar sobre el dominio que hemos concebido, cuantificamos sobre él del modo como estamos acostumbrados a cuantificar sobre dominios de objetos, concretos o abstractos, que existen en el sentido elemental. Estos cuantificadores conservan su sentido estándar en la medida en que los principios lógicos por los que se rijan, tal y como están contenidos en las reglas de introducción y eliminación habituales, se sigan manteniendo. Lo que *no* se mantiene es el supuesto de que un enunciado cuantificacional tenga que tener siempre un valor de verdad determinado —el supuesto que subyace a la matemática clásica—. Cuando el dominio es infinito, este supuesto equivale a asumir que un proceso infinito siempre tendrá un resultado definido; y ésta no es una presunción legítima. Nuestros enunciados matemáticos tienen sentido en cuanto que la pretensión de haberlos establecido puede ser justificada objetivamente; pero no tienen valores de verdad fijos independientemente de la posibilidad de esta justificación. Ésta es la base de la matemática constructiva, como opuesta a la clásica.

¿Por qué la existencia de los elementos del dominio recién construido no puede subscribirse apelando al principio contextual? Para Frege, el principio contextual requería que nosotros hubiéramos proporcionado los elementos que determinan la verdad o falsedad de todos los enunciados que refirieran a los objetos recién introducidos, o cuantificaran sobre ellos. Si la concepción constructiva del sentido de los enunciados matemáticos es correcta, esto no puede afirmarse de ellos y, por tanto, no se puede apelar al principio contextual tal y como lo formuló Frege. La concepción constructiva es, por supuesto, polémica; pero hay una razón por la cual el principio contextual no puede ser invocado, que no puede ser rechazada ni siquiera por los matemáticos clásicos. Se trata de que cualquier especificación adecuada de lo que comprende el nuevo dominio involucrará cuantificación de segundo orden con respecto a ese mismo dominio. Este hecho ha sido esgrimido con frecuencia. El principio de inducción, la completud de orden del continuo, el axioma de reemplazo, son todos esencialmente principios de segundo orden. Por esta razón una especificación del dominio de una teoría matemática fundamental será siempre inevitablemente impredicativa. No hay por consiguiente un argumento no circular para mostrar que hemos determinado los valores de verdad de todos los enunciados que traten sobre ella; el principio contextual, al menos en la forma como lo enunció Frege, no puede, por tanto, ser invocado.

¿En qué grado, entonces, son verdaderos por necesidad los teoremas de una teoría matemática de este tipo? No son verdades lógicas elementales: se siguen por necesidad lógica de los axiomas de la teoría, pero esos axiomas no son a su vez lógicamente necesarios. Cualquier proposición de la teoría que sea genuinamente aplicable a la realidad se mantendrá, pienso yo, por necesidad analítica. No será una verdad lógica, ya que se referirá a y cuantificará sobre objetos abstractos, cuya existencia no está garantizada por la lógica; pero podrá ser formulada de tal forma que los únicos objetos que presuponga sean no objetos puramente matemáticos, sino objetos abstraídos de la realidad empírica. La tesis que acabo de exponer es una conjetura, no algo de lo que esté seguro del todo; se necesitaría una investigación más detallada para establecerla, pero creo que es correcta. Si es, en efecto, cierta, entonces, tal y como Frege observó, un teorema matemático aplicado a la realidad contendrá en sí mismo una compleja cadena de inferencia deductiva, que nos lleve de premisas empíricas a una conclusión empírica.

¿Cuál es, entonces, el motivo de que nos formemos el modelo mental que constituye el objeto de estudio de una teoría matemática? Desde el punto de vista de sus aplicaciones, la respuesta es evidente: no podemos delimitar qué objetos matemáticos pueden ser ahora o en el futuro abstraídos de la realidad: nuestro propósito es estar preparados de antemano para todas las aplicaciones posibles. Desde un punto de vista matemático, la respuesta es igualmente evidente: el modelo tiene un mayor interés intelectual, y puede

ser manejado con una facilidad mucho mayor que una teoría diseñada a medida de las aplicaciones que se pueden hacer en el momento, y que necesite constantes revisiones conforme resultan posibles aplicaciones nuevas. ¿Quién hubiese querido nunca probar el último teorema de Fermat por el interés de las aplicaciones que puedan hacerse de él? ¿Quién se hubiera mantenido indiferente sobre su validez más allá de cierto límite para el exponente  $n$ ?

¿Qué quise decir al hablar de una teoría matemática como “genuinamente aplicable”? No simplemente que esté en la práctica aplicada en la ciencia. La teoría de números es aquí un caso engañoso: cuando sus proposiciones son aplicables en absoluto, no se puede dudar de que sean genuinamente aplicables. El análisis es algo distinto: el continuo clásico no está extraído de la realidad empírica, sino impuesto sobre ella. Nosotros concebimos todas las cantidades físicas, incluyendo intervalos temporales, como teniendo magnitudes precisas dadas, relativamente a una unidad, por números reales, a pesar del hecho de que sólo somos capaces de determinar éstos dentro de intervalos racionales. Esto no es tanto una teoría física como una base conceptual sobre la cual descansan nuestras teorías: pero queda abierta la cuestión de hasta qué punto es bueno el ajuste entre el modelo matemático y la realidad empírica. En mi opinión, el ajuste es imperfecto: necesitamos una concepción diferente de las magnitudes físicas y de la continuidad física. Ésta, una vez más, es una cuestión controvertida que no me propongo discutir ahora: sólo la menciono porque, si estoy en lo cierto, las proposiciones del análisis, consideradas como aplicables a la realidad física, no pueden contar como analíticamente necesarias, sino sólo como necesariamente correctas en nuestro modelo matemático del continuo clásico. Pero la cuestión sobre la categoría de estas proposiciones no es una cuestión empírica: es una cuestión conceptual si el continuo clásico nos da o no el modelo correcto de las magnitudes físicas. El logicismo, si lo consideramos como válido para las proposiciones matemáticas aplicables a la realidad empírica, es una doctrina esencialmente correcta, suponiendo que el modelo matemático con el cual se la relaciona dé una representación correcta de esa realidad. Y esto último, sin embargo, es una cuestión filosófica, ni científica, ni matemática, ni lógica.

*New College  
Oxford University  
Oxford OX1 3BN, UK*

NOTAS

\* El presente artículo, que *Teorema* publica por vez primera, es una versión castellana del trabajo titulado "The Existence of Mathematical Objects". La traducción y el resumen inicial han sido realizados por Gustavo Fernández Díez-Picazo.

© Michael Dummett