teorema
Vol. XXII/1-2, 2003, pp. 23-41

Imaginarios e hiperimaginarios

Enrique Casanovas

ABSTRACT

New objects that were previously only implicit in the structures have been introduced recently in model theory. They are the imaginaries and the hyperimaginaries. In this paper we explain why they have been introduced and we analyze its role in stable and simple theories and in Galois theory. Finally we discuss the question of elimination of hyperimaginaries.

RESUMEN

En teoría de modelos se han introducido recientemente nuevos objetos que antes sólo estaban implícitos en las estructuras: los imaginarios y los hiperimaginarios. En este artículo explicamos las razones de su introducción y analizamos su papel en las teorías estables y simples y en la teoría de Galois. Finalmente discutimos la problemática de la eliminación de los hiperimaginarios.

I. EL MODELO MONSTRUO

En teoría de modelos estudiamos teorías —casi siempre formuladas en un lenguaje de primer orden— y estudiamos sus modelos, que son las estructuras que satisfacen todos los enunciados de la teoría. Si la teoría es incompleta lo más natural es que nos preocupemos por conocer y sistematizar todas las teorías completas que la extienden. Si la teoría ya es completa, nos interesamos por entender y caracterizar sus distintos modelos así como los conjuntos y las relaciones que en ellos son definibles. Para fijar notación estipulemos, pues, que analizamos una teoría completa y consistente T de lenguaje o alfabeto L.

Nunca pretendemos distinguir entre modelos isomorfos de T. Si todos los modelos de T son isomorfos entre sí, todos tienen el mismo tamaño finito y T no tiene modelos infinitos. Ése no es el caso interesante. Supongamos entonces adicionalmente que nuestra teoría T tiene modelos de tamaño infinito. En ese caso podemos garantizar que T tiene al menos un modelo en cada uno de los cardinales infinitos a partir de la cardinalidad $|T|$ del lenguaje de la teoría. Nos enfrentamos a una gran diversidad de modelos, esos modelos pueden extenderse a otros y en general debemos ser muy cuidadosos cuando hacemos afirmaciones sobre satisfacción de fórmulas y definibilidad de relaciones, pues hay que concretar en cada caso en qué modelo estamos trabajando.

Hay una construcción que se ha hecho muy popular en los últimos años y que permite compaginar la pluralidad de modelos con la existencia de un modelo privilegiado del que todos los demás no son más que aspectos parciales. Ese modelo se llama *modelo monstruo* de T. Para entender el modelo monstruo de T es conveniente primero discutir brevemente las nociones de tipo elemental y de modelo saturado. Consideremos un modelo M de T. Las extensiones de T en las que estamos interesados son extensiones elementales, esto es, extensiones en las que las tuplas de elementos de M satisfacen las mismas fórmulas que en M. Si A es un subconjunto de M y $a = (a_1,\ldots,a_n)$ es una n-tupla de elementos de M, el *tipo elemental* de a sobre A (o simplemente, el *tipo* de a sobre A) es el conjunto formado por todas las fórmulas $\varphi(x_1,...,x_n)$ de L con parámetros en A que son satisfechas por a en M. Es usual referirse a ese conjunto de fórmulas con la notación $\mathrm{tp}_M(a/A)$. En una extensión elemental N de M, el tipo es el mismo, es decir $\mathrm{tp}_M(a/A) = \mathrm{tp}_N(a/A)$. Pero como en N hay nuevos elementos puede haber tipos de tuplas sobre A que no correspondan a ningún tipo de una tupla de M, es decir, que no se realicen en M.

Pues bien, se dice que un modelo M es *saturado* si para cada subconjunto A de M de cardinalidad menor que la cardinalidad de M, todo tipo sobre A se realiza en M. Eso significa que toda situación posible respecto a tales subconjuntos A se da, de hecho, en M si se puede describir mediante fórmulas de primer orden con parámetros en A. Debemos matizar que las situaciones posibles de que hablamos son las compatibles con la teoría y cada una de ellas ocurre en alguna extensión elemental de M. Puede que T no tenga ningún modelo saturado de una cardinalidad concreta, pero si tiene dos de la misma cardinalidad, entonces son isomorfos. Los modelos saturados son, pues, únicos salvo isomorfía.

Consideremos ahora la siguiente construcción. Comenzamos con un modelo arbitrario M_0 de T y lo tomamos como punto de partida para una cadena elemental (M_α: $\alpha\in\mathrm{On}$) cuyos índices recorren todos los números ordinales. Si α es un ordinal límite se define M_α como la unión $\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$ de los modelos previos. Y en el caso sucesor $\alpha+1$ lo que hacemos es tomar como $M_{\alpha+1}$ una extensión elemental estricta de M_α en la que se realicen todos los tipos sobre subconjuntos de M_α de cardinalidad menor que la de M_α. Eso no quiere decir que $M_{\alpha+1}$ sea saturado ni siquiera que realice todos los tipos sobre subconjuntos suyos de cardinalidad menor que la de M_α. Cada modelo M_α que se obtiene en esta construcción soluciona problemas ya que realiza tipos que queríamos realizar, pero también crea problemas ya que da lugar a nuevos tipos que posteriormente vamos a querer realizar.

Como la construcción se ha realizado a lo largo de todos los ordinales y se han ido añadiendo nuevos elementos constantemente, la unión de esta cadena no es —en un sentido propio— un modelo. De entrada, su universo no es un conjunto, sino una clase propia. Pero esa objeción no tiene gran peso.

No hay dificultad ninguna en ampliar la definición de "modelo" de manera que también se aplique a estas circunstancias. Si lo hacemos, observaremos que la unión de la cadena (M_α: $\alpha\in$On) es un modelo $\mathbb{C}$ de T y una extensión elemental de cada M_α. Además $\mathbb{C}$ es saturado en el siguiente sentido: para cada subconjunto A de $\mathbb{C}$, todo tipo sobre A se realiza en $\mathbb{C}$. El subconjunto A puede tener cualquier tamaño, pero debe ser un conjunto y no una clase propia. Llamamos a $\mathbb{C}$ el *modelo monstruo* de T.

Del mismo modo que en cada cardinalidad hay a lo sumo un modelo saturado (salvo isomorfía), también el modelo monstruo es único en ese sentido: cualquier modelo de T cuyo universo sea una clase propia y que realice todos los tipos sobre todos sus subconjuntos es isomorfo a $\mathbb{C}$. Otra manera de caracterizar el modelo monstruo $\mathbb{C}$ de T es por sus propiedades de *universalidad* y *homogeneidad*:

- Todo modelo de T es isomorfo a una subestructura elemental de $\mathbb{C}$.
- Si A es un subconjunto de $\mathbb{C}$ y a, b son tuplas de $\mathbb{C}$ (incluso secuencias de cualquier longitud) tales que tp(a/A) = tp(b/A), entonces hay un automorfismo de $\mathbb{C}$ que fija cada elemento de A y transforma a en b.

De ello se desprenden dos consecuencias. Una es que no es necesario prestar atención a modelos de T que no sean submodelos elementales de $\mathbb{C}$, salvo en circunstancias muy especiales. Otra es que podemos identificar tp(a/A) con la órbita de a en Aut($\mathbb{C}/A$), los automorfismos de $\mathbb{C}$ que fijan cada elemento de A. Por tanto —en un cierto sentido— todo está en $\mathbb{C}$. Todos los conjuntos de parámetros que nos puedan interesar son subconjuntos de $\mathbb{C}$ y todas las realizaciones de tipos aparecen en $\mathbb{C}$. Podemos olvidarnos del modelo en que estemos definiendo las nociones fundamentales y considerar que siempre lo hacemos en $\mathbb{C}$. Si no se dice explícitamente lo contrario, así será en lo que sigue.

A modo de ejemplo y para introducir nociones que posteriormente serán necesarias, veamos lo que ocurre con la clausura algebraica y la clausura definible de un conjunto de parámetros. Se dice que un elemento a es algebraico sobre el conjunto A si a satisface una fórmula $\varphi(x)$ con parámetros en A que sólo es satisfecha por un número finito de elementos. Eso es equivalente a que la órbita de a en Aut($\mathbb{C}/A$) sea finita. Llamamos *clausura algebraica* de A al conjunto acl(A) formado por todos los elementos que son algebraicos sobre A. La misma operación podría haberse definido en cualquier modelo que contuviera a A y el resultado habría sido el mismo. Al hacerlo en el modelo monstruo, nos despreocupamos de elegir un modelo particular donde efectuar la definición y de demostrar que el resultado es independiente de la elección del modelo. Otra operación de clausura importante es la *clausura* *definible*. Se dice que un elemento a es definible sobre el conjunto A si satisface una fórmula con parámetros en A que sólo es satisfecha por un elemento. Dicho de modo equivalente, la órbita de a en $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/A)$ tiene a a como único elemento. La clausura definible de A es el conjunto $\mathrm{dcl}(A)$ formado por todos los elementos que son definibles sobre A. Obviamente, $A\subseteq\mathrm{dcl}(A)\subseteq\mathrm{acl}(A)\subseteq M$ si M es un modelo cualquiera (submodelo elemental de $\mathbb{C}$) que contiene a A.

II. IMAGINARIOS

Desde finales de los años sesenta, la teoría de la estabilidad ha sido la parte de la teoría de modelos que más nuevas ideas y nuevos métodos ha generado para el análisis de la estructura de los modelos en términos de definibilidad. S. Shelah definió las *teorías estables* y desarrolló para ellas todo un complejo entramado de nociones y técnicas que permiten en muchas ocasiones entender cómo un modelo está construido a partir de unos trozos básicos cuya naturaleza también se estudia sistemáticamente. Todo ello se aplica en ciertos casos a la caracterización de los tipos de isomorfía de los modelos de la teoría.

Dentro del análisis de un modelo de una teoría estable es conveniente fijarse en cómo un tipo $p(x)$ sobre un conjunto de parámetros A puede extenderse a un tipo $q(x)$ sobre un conjunto de parámetros más grande $B\supseteq A$. Ampliar el tipo $p(x)$ de A a B supone añadir una serie de fórmulas con parámetros en b y supone por tanto añadir nueva información. De entre las posibles extensiones hay algunas en las que se añade la mínima información imprescindible en el paso de A a B, es decir se toman las opciones menos comprometidas y que garantizan la máxima libertad posible para otras extensiones futuras. Esas extensiones se llaman *extensiones no bifurcantes*. Omitimos los tecnicismos de la definición formal de extensión no bifurcante pues para lo que sigue basta con la vaga noción de ser una extensión libre. Cuando un tipo $p(x)$ sobre A tiene únicamente una extensión no bifurcante sobre cada conjunto $B\subseteq A$ se dice que se trata de un *tipo estacionario*. Los tipos sobre modelos son siempre tipos estacionarios. Si $p(x)$ y $p'(x)$ son tipos estacionarios respectivamente sobre los conjuntos A y A', se dice que son tipos *paralelos* si tienen la misma extensión no bifurcante sobre todo conjunto que extiende a A y a A'.

Otra manera de presentar el paralelismo de tipos es en términos de *extensiones globales* no bifurcantes. La noción de tipo se puede generalizar de modo que quepa hablar de tipos sobre el modelo monstruo $\mathbb{C}$. Son conjuntos de fórmulas con parámetros en $\mathbb{C}$ que son consistentes y completos. A diferencia de un tipo sobre un conjunto de parámetros, un tipo global normalmente no puede realizarse en $\mathbb{C}$. Pero se puede definir qué significa que un tipo global $\mathfrak{p}(x)$ sea una extensión no bifurcante de un tipo $p(x)$ con parámetros en el conjunto A. Pues bien, un tipo $p(x)$ es estacionario si tiene una única extensión global no bifurcante y los tipos estacionarios $p(x)$ y $p'(x)$ son paralelos si tienen la misma extensión global no bifurcante. De este modo podemos ver los tipos estacionarios como fragmentos de un tipo global. Desde esos fragmentos se puede recuperar el tipo global. Paralelismo significa que los fragmentos lo son del mismo tipo global.

Shelah introdujo todas estas nociones y se dio cuenta de la conveniencia de representar de alguna manera las clases de paralelismo de tipos estacionarios mediante ciertos conjuntos. El objetivo inmediato era poder desarrollar un cálculo o estudio algebraico de la bifurcación. Las leyes que rigen las relaciones de bifurcación entre tipos son muy complejas y se iluminan en gran medida cuando se expresan en términos del mencionado cálculo. Los ingredientes esenciales para este paso son las *bases canónicas* de los tipos estacionarios. Consideremos un tipo $p(x)$ sobre un conjunto A y un automorfismo f del modelo monstruo $\mathtt{C}$. El automorfismo transforma p en un tipo p^f sobre la imagen $f(A)$ de A. Para obtener p^f a partir de p basta con sustituir en las fórmulas de p todos los parámetros a de A por los correspondientes parámetros $f(a)$ de $f(A)$. De modo análogo, f transforma cada tipo global $\mathtt{p}$ en un correspondiente tipo global $\mathtt{p}^f$. Un conjunto C es una base canónica de un tipo estacionario p si los automorfismos que fijan todos los elementos de C son los automorfismos que transforman p en un tipo p^f paralelo a p, es decir, son los automorfismos que respetan la clase de paralelismo de p y también los automorfismos que dejan invariante la extensión global no bifurcante de p. Normalmente se exige además la condición de que C esté definiblemente cerrado —esto es, $\mathrm{dcl}(C) = C$— para poder garantizar que la base canónica de un tipo estacionario, caso de existir, es única.

Para garantizar la existencia de las bases canónicas de los tipos estacionarios en las teorías estables, Shelah introdujo los imaginarios. En su origen fueron, de acuerdo con esto, un recurso técnico para desarrollar un cálculo cuyo interés se limitaba a la descripción de las relaciones entre partes estructuralmente significativas de un modelo de una teoría estable. No parece que ello justifique de modo inmediato que merezcan una atención especial desde la amplia perspectiva de la teoría de modelos y de la lógica. Pero los descubrimientos posteriores han acabado llevando a un primer plano a los imaginarios y su problemática.

Un *imaginario* es una clase de equivalencia a/E de una n-tupla a en una relación de equivalencia E en $\mathtt{C}^n$ que es definible sin parámetros en $\mathtt{C}$. El imaginario a/E normalmente no es un elemento de $\mathtt{C}$ pero es posible hablar de él en $\mathtt{C}$ e incluso es posible cuantificar sobre todos los imaginarios de la relación E. Darles verdadera carta de naturaleza y convertirlos en auténticos elementos del modelo exige un paso adicional que explicamos a continuación.

Los imaginarios asociados al modelo monstruo $\mathfrak{C}$ no son sólo objetos aislados sino que conforman una estructura. Es hoy día habitual seguir a M. Makkai en la idea de adoptar una estructura multivariada para alojar a los imaginarios. La lógica multivariada es una ligera generalización de la lógica de primer orden, tiene básicamente las mismas propiedades. La diferencia estriba en que, en lugar de tener un único universo en cada estructura, admitimos la posibilidad de que las estructuras tengan varios universos —*sorts* en inglés— e incluso un número infinito de ellos. Cada operación de la estructura tiene unos universos asignados como dominio y un universo como lugar donde tomar valores; también las relaciones tienen unos universos de la estructura asignados, de manera que puede relacionar objetos pertenecientes a distintos de ellos. El lenguaje formal debe adaptarse a esos cambios de planteamiento, proporcionando tipos de variables distintas para cada universo y especificando el universo que corresponden a cada término y la secuencia de universos que corresponde a cada símbolo de relación. La lógica multivariada es, a menudo, más apropiada para tratar de modo natural las estructuras concretas que aparecen habitualmente en matemáticas pero las complicaciones de notación que la acompañan cuando se presenta con generalidad suelen provocar su sustitución por la más simple sintaxis de la lógica de primer orden. El caso de los imaginarios es uno de esos casos concretos en que la lógica multivariada es más natural y conveniente.

Para tratar a los imaginarios como estructura multivariada introducimos un nuevo universo para cada fórmula $\varphi(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)$ que en $\mathfrak{C}$ define una relación de equivalencia E en $\mathfrak{C}^n$. El nuevo universo es el conjunto cociente $\mathfrak{C}^n/E = \{a/E\colon a\in\mathfrak{C}^n\}$. Sus elementos son, por tanto, los imaginarios asociados a E. Identificamos el universo $\mathfrak{C}/{=}$ asociado a la igualdad entre elementos de $\mathfrak{C}$ con $\mathfrak{C}$ mismo y mantenemos en él toda la estructura de $\mathfrak{C}$. Por lo demás, la única estructura adicional la constituyen las funciones de proyección $\pi_E\colon \mathfrak{C}^n \to \mathfrak{C}^n/E$ que asignan a cada n-tupla a de $\mathfrak{C}$ su clase de equivalencia en E, $\pi_E(a) = a/E$. La estructura multivariada así construida se designa con la notación $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ y su correspondiente teoría se designa con T^{eq}. No tiene dificultad ninguna especificar los axiomas que hay que añadir a T para obtener T^{eq}.

Para cada número natural n hay una relación de equivalencia E en $\mathfrak{C}^n$ cada una de cuyas clases de equivalencia consta de una única n-tupla. La n-tupla $a_1,...,a_n$ puede identificarse entonces con el imaginario $(a_1,...,a_n)/E$, que es un elemento —ya no una tupla— del universo $\mathfrak{C}^n/E$. De modo aún más general, toda n-tupla de imaginarios puede identificarse con un imaginario. Eso significa que en $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ pierde importancia la diferencia entre elementos del universo y secuencias finitas de elementos del universo. También es digno de mención que todo subconjunto finito de $\mathfrak{C}$ es identificable con un imaginario eligiendo la apropiada relación de equivalencia, que en general dependerá del tamaño del conjunto finito. Si A tiene tamaño n y se enumeran sus elementos $a_1,\ldots,a_n$, entonces la relación de equivalencia en cuestión se establece en $\mathbb{C}^n$ y consiste en que dos n-tuplas están relacionadas cuando coinciden tras reordenar sus elementos. Generalizando esta idea se puede también representar cualquier conjunto finito de imaginarios mediante un imaginario.

La estructura $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ está estrechamente conectada con $\mathbb{C}$, hasta tal punto que a veces cuesta entender cómo es posible que $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ represente alguna novedad y ventaja frente a $\mathbb{C}$. Esta fuerte relación entre ambas estructuras está fundada en que es posible traducir fórmula a fórmula del lenguaje de $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ al de $\mathbb{C}$ de acuerdo con el siguiente principio: si $\varphi(x_{E_1} \ldots, x_{E_n})$ es una fórmula del lenguaje de $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ con las variables libres $x_{E_1},\ldots, x_{E_n}$ —donde los subíndices hacen referencia a los respectivos universos de variación— entonces existe una fórmula $\psi(y_1^1,\ldots,y_{m_1}^1, y_1^n,\ldots,y_{m_n}^n)$ del lenguaje de $\mathbb{C}$ —donde los números $m_1,\ldots,m_n$ se han elegido de modo que cada E_i sea una relación de equivalencia en $\mathbb{C}^{m_i}$ — tal que para cualesquiera elementos $a_1^1,\ldots,a_{m1}^1,\ldots,a_1^n,\ldots,a_{mn}^n$ de $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}\models\varphi(\pi_{E_1}(a_1^1,\ldots,a_{m1}^1),\ldots,\pi_{E_n}(a_1^n,\ldots,a_{m_n}^n))$ si y sólo si $\mathbb{C}\models\psi(a_1^1,\ldots,a_{m1}^1 \ldots, a_1^n,\ldots,a_{mn}^n)$.

Una consecuencia de ese principio de traducción es que $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ es un modelo monstruo de T^{eq}. La clausura algebraica y la clausura definible son operaciones que se pueden definir también en lógica multivariada y en particular en $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$. Usamos la notación $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ y $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$ para referirnos a estas operaciones efectuadas en $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$. Se sigue también del principio de traducción que para cada subconjunto A de $\mathbb{C}$, $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)\cap\mathbb{C} = \mathrm{acl}(A)$ y que $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)\cap\mathbb{C} = \mathrm{dcl}(A)$, de manera que estas operaciones no aportan nada nuevo en el estricto ámbito de $\mathbb{C}$. Las relaciones de definibilidad entre elementos de $\mathbb{C}$ no se alteran al pasar a $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ y además los elementos de $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ son definibles —en $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$— a partir de elementos de $\mathbb{C}$. De hecho $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ y cualquier relación n-ádica en $\mathbb{C}$ que sea definible con parámetros en $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ es definible con parámetros (de $\mathbb{C}$) en la estructura $\mathbb{C}$.

En lo que respecta a automorfismos, hay también una gran proximidad entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$. Todo automorfismo de $\mathbb{C}$ tiene una y sólo una extensión a un automorfismo de $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$, y todo automorfismo de $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ es la extensión de un —único, claro está— automorfismo de $\mathbb{C}$. Por tanto los grupos $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/A)$ y $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}/A)$ son naturalmente isomorfos e identificables para muchos propósitos. Por ejemplo, cuando A no es un subconjunto de $\mathbb{C}$ sino de $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ podemos a pesar de todo hablar de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/A)$.

III. Usos y eliminación de los imaginarios

Los imaginarios se introdujeron para proporcionar bases canónicas, pero pronto se les encontró otras aplicaciones. Algunas de ellas afectan a la teoría general de la definibilidad y la interpretabilidad en el contexto de cualquier teoría de primer orden, estable o no.

Comentaremos primero el uso de los imaginarios para definir explícitamente los *tipos fuertes* en las teorías estables. Ya hemos indicado que un tipo $p(x)$ sobre un conjunto A puede tener más de una extensión no bifurcante sobre un conjunto más grande B. Pero todas las podemos distinguir mediante relaciones de equivalencia. Si $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son dos extensiones no bifurcantes de $p(x)$ sobre B, hay una relación de equivalencia E, definible sobre A y con sólo un número finito de clases de equivalencia, tal que cualesquiera realizaciones a_1 de p_1 y a_2 de p_2 tienen clases de equivalencia distintas en E. Para determinar una única extensión no bifurcante de $p(x)$ sobre B debemos añadir la información de qué clase de equivalencia queremos escoger en cada una de esas relaciones de equivalencia. Ello conduce a la definición de *tipo fuerte sobre A*. Se dice que las tuplas a y b tienen el mismo tipo fuerte sobre A si $E(a,b)$ para cada relación de equivalencia A-definible E que tenga sólo un número finito de clases. Como ya sugiere la terminología, si a y b tienen el mismo tipo fuerte sobre A también tienen el mismo tipo sobre A. Para trabajar con tipos fuertes en el contexto de la lógica de primer orden necesitamos representar a los tipos fuertes mediante conjuntos de fórmulas. Hay diversos artificios para realizar esa representación, pero ninguno es tan natural e iluminador como el que se obtiene mediante el uso de imaginarios. Se justifica en el hecho de que dos tuplas a y b tienen el mismo tipo fuerte sobre A si y sólo si tienen el mismo tipo sobre la clausura algebraica imaginaria de A, esto es, $\mathrm{tp}(a/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)) = \mathrm{tp}(b/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A))$. Eso sugiere, naturalmente, definir el tipo fuerte de a sobre A como $\mathrm{stp}(a/A) = \mathrm{tp}(a/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A))$.

Desde el punto de vista de la teoría de la estabilidad hay una gran diferencia entre la clausura algebraica $\mathrm{acl}(A)$ y la clausura algebraica imaginaria $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$. Si $p(x)$ es un tipo sobre A, tanto las extensiones de p sobre $\mathrm{acl}(A)$ como las extensiones sobre $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ son siempre no bifurcantes. Sin embargo, todas las posibles extensiones no bifurcantes de p surgen en el paso de A a $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ pero no necesariamente en el paso intermedio de A a $\mathrm{acl}(A)$. Los tipos sobre $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ son estacionarios y toda extensión estacionaria no bifurcante de p es paralela a una extensión de p sobre $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$. Si no nos situamos en el mundo imaginario y queremos, a pesar de ello, identificar las distintas extensiones no bifurcantes de p, nos vemos forzados a elegir un modelo M que contenga a A y considerar las posibles extensiones no bifurcantes de p sobre M. Ahí también surgen también todas, pero estamos sometidos a la arbitrariedad de la elección del modelo M y, además, no todas las extensiones de p sobre M tienen que ser no bifurcantes. La clausura algebraica efectuada en el universo imaginario es una construcción canónica y libre de elecciones arbitrarias. Además para esos propósitos es una construcción mínima, pues

$\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ es precisamente la intersección de todos los submodelos elementales de $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ que contienen a A.

Otra aplicación importante de los imaginarios consiste en permitir el establecimiento de una teoría de Galois —una generalización de la teoría clásica de Galois para cuerpos— en cualquier teoría completa de primer orden. En este caso no es una creación de S. Shelah sino de B. Poizat [Poizat (1983)], quien se apoyó en unas investigaciones previas de M. Krasner. La teoría de Galois considera extensiones normales de cuerpos $F \subseteq K$ y establece una correspondencia biunívoca entre cuerpos intermedios y subgrupos cerrados del grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(K/F)$ con la topología de Krull. Para simplificar vamos a considerar únicamente el caso en que K es la clausura algebraica —en el sentido de la teoría de cuerpos— de F y los cuerpos son de característica cero. La teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero— que abreviaremos por ACF_0— es la teoría completa del cuerpo de los números complejos. Si A es un conjunto de parámetros del modelo monstruo de ACF_0, $\mathrm{dcl}(A)$ es el cuerpo generado por A y $\mathrm{acl}(A)$ es su clausura algebraica en el sentido de la teoría de cuerpos. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/\mathrm{acl}(A))$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/A)$. El grupo cociente es isomorfo a $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(A)/A)$, el grupo de las permutaciones elementales de $\mathrm{acl}(A)$ que fijan cada elemento de A. Admitiendo como base de abiertos los conjuntos $O_{a,b} = \{f \in \mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(A)/A) : f(a) = b\}$ para cualesquiera tuplas finitas $a,b \in \mathrm{acl}(A)$ resulta que $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(A)/A)$ es un grupo topológico profinito. Todo eso es cierto en cualquier teoría pero en el caso de ACF_0 el grupo es el grupo absoluto de Galois sobre el cuerpo generado por A y la topología es la topología de Krull. Todo lo dicho hasta aquí vale también en $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$, donde $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ sustituye a $\mathrm{acl}(A)$. Los imaginarios no intervienen hasta el momento de ningún modo especial en la teoría de Galois, simplemente son un caso particular más. Sin embargo Poizat desarrolló incluso estas nociones iniciales para teorías con eliminación de imaginarios.

Se dice que T tiene *eliminación de imaginarios* o que *T elimina los imaginarios* si para cada imaginario $e \in \mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ hay una tupla a de elementos de $\mathfrak{C}$ tal que e y a son interdefinibles, es decir, $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(e)$. En esas circunstancias el imaginario e es prescindible en favor de a prácticamente para cualquier propósito y el tránsito de $\mathfrak{C}$ a $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ resulta ser innecesario. En teorías con eliminación de imaginarios no necesitamos construir $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$ pues todas sus ventajas están ya presentes en $\mathfrak{C}$.

Poizat demostró que ACF_0 tiene eliminación de imaginarios y desarrolló la teoría de Galois para teorías que eliminan los imaginarios. Como T^{eq} siempre elimina los imaginarios, en cualquier caso se puede presentar la teoría de Galois en $\mathfrak{C}^{\mathrm{eq}}$. El resultado fundamental es que existe una correspondencia biunívoca entre subconjuntos de $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ que contienen a A y están definiblemente cerrados y subgrupos cerrados de $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)/A)$. La correspondencia se obtiene asignando a cada conjunto definiblemente cerrado B tal que $A \subseteq B \subseteq \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ el subgrupo $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\mathrm{A})/B)$. La correspondencia inversa es la que asigna a cada subgrupo cerrado G el conjunto $\{a \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)\colon f(a) = a$ para cada $f \in G\}$. Esta correspondencia de Galois no puede establecerse en $\mathbb{C}$ a no ser que haya eliminación de imaginarios. Los imaginarios son, por tanto, esenciales en la teoría generalizada de Galois.

La importancia de los imaginarios va más allá de las bases canónicas, los tipos fuertes y la teoría de Galois. Se manifiesta principalmente en el terreno de la definibilidad e interpretabilidad. Consideremos además de T y $\mathbb{C}$ otra teoría T' con su modelo monstruo $\mathbb{C}'$. Una interpretación de $\mathbb{C}'$ en $\mathbb{C}$ —y con ello de T' en T— consiste en determinar una subclase $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}^n$ definible sin parámetros en $\mathbb{C}$, una relación de equivalencia E en $\mathbb{D}$ también definible en $\mathbb{C}$ sin parámetros y una interpretación $s^{\mathbb{D}/E}$ de cada símbolo s del lenguaje L' de T' en el cociente $\mathbb{D}/E$ de modo que la estructura resultante $(\mathbb{D}/E, s^{\mathbb{D}/E})_{s \in L'}$ sea isomorfa a $\mathbb{C}'$ y la preimagen de cada $s^{\mathbb{D}/E}$ en la proyección $a \mapsto a/E$ sea definible sin parámetros en $\mathbb{C}$. El uso de imaginarios convierte la interpretabilidad en una mera cuestión de definibilidad: que $\mathbb{C}'$ sea interpretable en $\mathbb{C}$ significa que $\mathbb{C}'$ es isomorfo a la restricción a L' de una expansión definicional de uno de los universos de $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$. Si T elimina los imaginarios, todas las estructuras interpretables en $\mathbb{C}$ son definibles en $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ sin necesidad de formar cocientes. Que T y T' sean bi-interpretables significa que tienen modelos monstruos interdefinibles.

En el contexto de la pura teoría de la definibilidad, los imaginarios tienen la ventaja de proporcionar *parámetros canónicos* para todas las relaciones definibles. Eso significa que para cada relación R definible en $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ existe un elemento $e \in \mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ tal que para cada automorfismo $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^{\mathrm{eq}})$, $f(R) = R$ si y sólo si $f(e) = e$. Significa también que para cada tal R existe una fórmula $\varphi(x,y)$ sin parámetros para la que hay una única tupla a tal que $\varphi(x,a)$ define R. Por otro lado, el uso de imaginarios proporciona una iluminadora versión de la noción de ser *casi definible sobre* un conjunto. Una relación R es casi definible sobre A si es definible sobre cualquier modelo que contenga a A. En $\mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ eso equivale a ser definible sobre $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$. Todas estas propiedades se trasladan a $\mathbb{C}$ si T elimina los imaginarios.

Cuando en teoría de modelos se comienza a estudiar una teoría completa T la primera tarea suele ser elegir axiomas y mostrar su completud. Es muy interesante elegir el lenguaje de modo que la teoría elimine los cuantificadores, por lo cual es tradicional ampliar el lenguaje original obteniendo una extensión definicional de la teoría que además de ser completa elimine los cuantificadores. Ésta es la segunda tarea. Recientemente se ha añadido una tercera tarea rutinaria que suele interesar realizar en el estudio preliminar de T. Consiste en elegir los universos —*sorts*— sobre los que habla la teoría para obtener adicionalmente eliminación de imaginarios. Habiendo elegido universos, lenguaje y axiomas de modo que se obtenga una teoría completa con eliminación de cuantificadores y de imaginarios se está en condiciones óptimas para adentrarse en la teoría de modelos de T.

IV. Teorías simples y tipos fuertes de Lascar

A finales de los años noventa B. Kim y A. Pillay se dieron cuenta de que las *teorías simples* —introducidas por Shelah en los años setenta pero casi inexploradas— constituían una generalización de las teorías estables que conservaban lo esencial de la teoría de la bifurcación y que tenían nuevos e interesantes ejemplos, como el grafo aleatorio, los cuerpos pseudofinitos y los cuerpos con un automorfismo genérico. Iniciaron su estudio sistemático y con sorprendente rapidez el interés de los investigadores en teoría de modelos se desplazó de las teorías estables al nuevo escenario de las teorías simples. Muchas de las nociones y problemas resueltos en el contexto de las teorías estables se replantearon en el ámbito de las teorías simples. Algunos tuvieron adaptaciones y soluciones evidentes pero otros constituyeron y constituyen todavía retos de envergadura.

Gran parte de la teoría de la bifurcación sigue siendo válida en las teorías simples. La pérdida más significativa es que los tipos sobre modelos no son necesariamente estacionarios y que un tipo puede tener un número arbitrariamente grande de extensiones no bifurcantes. Las pérdidas vienen recompensadas por nuevas ideas y resultados, el principal de los cuales es el *teorema de independencia*. Lo exponemos a continuación.

Sea $p(x)$ un tipo completo sobre el conjunto A. Se dice que $p(x)$ es una *base de amalgamación* si siempre que B y C son dos extensiones de A independientes sobre A —es decir, el tipo sobre $A \cup C$ de cualquier tupla de B no bifurca sobre A— y $p_1(x)$, $p_2(x)$ son extensiones no bifurcantes de $p(x)$ sobre B y C respectivamente, entonces $p_1(x) \cup p_2(x)$ es consistente y puede extenderse a un tipo completo sobre $B \cup C$ que no bifurca sobre A. Los tipos estacionarios son siempre bases de amalgamación y en las teorías estables las bases de amalgamación son tipos estacionarios. En las teorías simples las bases de amalgamación suplen a los tipos estacionarios para muchos propósitos. El teorema de la independencia sobre modelos establece que en una teoría simple cualquier tipo sobre un modelo es una base de amalgamación.

Dos preguntas que surgen inmediatamente en esta nueva situación son qué ocurre con las bases canónicas y qué ocurre con los tipos fuertes en las teorías simples. Los tipos sobre $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ no son estacionarios en las teorías simples y además no son generalmente ni siquiera bases de amalgamación. La búsqueda de un sustituto condujo a la consideración de los *tipos fuertes de*

Lascar y al redescubrimiento de ideas y resultados que D. Lascar había obtenido a principios de los años ochenta [Lascar (1982)] en su intento de desarrollar una teoría general de Galois en un sentido más atrevido que el antes discutido de Poizat. Las bases canónicas van a definirse en el contexto de las teorías simples para las bases de amalgamación en vez de para los tipos estacionarios. Para entender bien tanto los tipos fuertes de Lascar como la teoría de Galois y las bases canónicas vamos a tener que ir más allá del universo imaginario e introducirnos en el hiperimaginario.

Lascar se percató de la relevancia de un cierto subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/A)$, el subgrupo $\mathrm{Autf}(\mathbb{C}/A)$ formado por los *automorfismos fuertes* sobre A. Es el subgrupo generado por los automorfismos que fijan todos los elementos de algún modelo que contiene a A. Es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A))$, de manera que el cociente $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathrm{A}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathrm{A})/\mathrm{Autf}(\mathbb{C}/\mathrm{A})$ contiene una copia isomorfa de $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)/A)$ y puede ser más grande. Lascar investigó exhaustivamente $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/A)$ y demostró que en todas las *teorías G-compactas* se trataba de un grupo topológico compacto y Hausdorff. La noción de teoría G-compacta fue introducida por el mismo Lascar para desarrollar su teoría. Mostró que las teorías estables son G-compactas y planteó la cuestión de si existen o no teorías que no son G-compactas. Ahora sabemos que las teorías simples también son G-compactas y se conoce un ejemplo debido a M. Ziegler de una teoría que no es G-compacta. En las teorías estables el grupo topológico $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/A)$ coincide con el grupo $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)/A)$ estudiado por Poizat y es, por tanto, profinito.

Se dice que dos tuplas a,b tienen el mismo *tipo fuerte de Lascar* sobre A si hay un automorfismo fuerte $f \in \mathrm{Autf}(\mathbb{C}/A)$ tal que $f(a) = b$. Los tipos fuertes de Lascar sobre A son, pues, las órbitas de los elementos y tuplas de $\mathbb{C}$ en la acción de $\mathrm{Autf}(\mathbb{C}/A)$. Si dos tuplas tienen el mismo tipo de Lascar sobre A, entonces tienen el mismo tipo fuerte sobre A y, en consecuencia, tienen el mismo tipo sobre A. En una teoría estable los tipos fuertes de Lascar coinciden con los tipos fuertes. Kim y Pillay descubrieron que los tipos fuertes de Lascar son el sustituto adecuado de los tipos fuertes en el ámbito de las teorías simples. Concretamente demostraron que en esas teorías los tipos fuertes de Lascar son bases de amalgamación: si las tuplas a,b tienen el mismo tipo fuerte de Lascar sobre A y B,C son dos extensiones de A que son independientes sobre A y tanto $\mathrm{tp}(a/B)$ como $\mathrm{tp}(b/C)$ son extensiones no bifurcantes del mismo tipo $\mathrm{tp}(a/A) = \mathrm{tp}(b/A)$, entonces $\mathrm{tp}(a/B) \cup \mathrm{tp}(b/C)$ es consistente y puede extenderse a un tipo completo sobre $B \cup C$ que no bifurca sobre A. Este resultado se conoce con el nombre de teorema de independencia para tipos fuertes de Lascar. De él se sigue como caso particular el previamente enunciado teorema de independencia sobre modelos.

Veamos ahora cómo se afronta el tema de las bases canónicas. Sean $p(x)$ y $q(x)$ bases de amalgamación sobre los conjuntos A y B en el contexto de una teoría simple. Se dice que $p(x)$ y $q(x)$ son *paralelos* si existen bases de amalgamación $p_1(x),...,p_n(x)$ tales que $p = p_1$, $q = p_n$ y para cada $i < n$, $p_i(x)$ y $p_{i+1}(x)$ tienen una extensión no bifurcante común. Si T es estable basta tomar $n = 2$ y se obtiene la relación de paralelismo que ya hemos discutido previamente. Una *base canónica* de la base de amalgamación $p(x)$ es un conjunto C con la propiedad de que para cada automorfismo $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, f fija todos los elementos de C si y sólo si f transforma p en un tipo p^f paralelo a p. Como en el caso de las bases canónicas de los tipos estacionarios en las teorías estables, exigimos adicionalmente que C esté definiblemente cerrado, lo cual garantiza su unicidad. Como en ese caso previo también, la dificultad estriba en garantizar la existencia de las bases canónicas. Por lo demás su uso es similar y ofrece el mismo tipo de ventajas para el cálculo del bifurcamiento.

B. Hart, B. Kim y A. Pillay propusieron [Hart, Kim & Pillay (2000)], inspirados en trabajos previos de E. Hrushovski, la introducción de los hiperimaginarios en teoría de modelos para hacer las veces de bases canónicas de bases de amalgamación en las teorías simples. Si $p(x)$ es una base de amalgamación sobre A elegimos una secuencia a, probablemente infinita, que enumera A y exhibimos explícitamente el papel de los parámetros de p en la forma $p(x) = p(x,a)$. Por tanto $p(x,y)$ no tiene parámetros y si b tiene el mismo tipo que a entonces $p(x,b)$ es también una base de amalgamación. Consideramos la relación de equivalencia que se da entre secuencias b,c que tienen el mismo tipo que a cuando tienen la propiedad de que $p(x,b)$ y $p(x,c)$ son bases de amalgamación paralelas. Hart, Kim y Pillay mostraron que en una teoría simple la relación es *tipo definible* sin parámetros, es decir, es definible mediante un conjunto de fórmulas del lenguaje L de T. Esta relación de equivalencia puede extenderse a una relación de equivalencia $\sim$ entre todas las secuencias de la misma longitud que a, que también es tipo definible y que coincide con la anterior para secuencias con el mismo tipo que a. La clase de equivalencia $a/\!\sim$ resulta tener las propiedades que buscábamos en la base canónica de $p(x,a)$: un automorfismo transforma $p(x,a)$ en una base de amalgamación paralela si y sólo si fija la clase de equivalencia $a/\!\sim$. Sin embargo, ni es un imaginario ni una secuencia de ellos. Es un objeto más complicado para el que necesitamos desarrollar instrumentos conceptuales adecuados.

V. HIPERIMAGINARIOS

Un *hiperimaginario* es la clase de equivalencia a/E de una secuencia a, posiblemente infinita, en una relación de equivalencia E que es tipo definible sin parámetros, por lo cual hay un conjunto de fórmulas $\Phi(x,y)$ del lenguaje L de T tal que $E = \{(c,d)\colon \mathbb{C} \models \Phi(c,d)\}$. Los imaginarios son, por tanto, hiperimaginarios. Las bases canónicas de las bases de amalgamación en las teorías simples son también hiperimaginarios. Es evidente que hay dos problemas iniciales que complican gravemente el tratamiento de los hiperimaginarios e impiden aplicar el mismo método que dimos a los imaginarios: la secuencia a puede tener longitud infinita, de manera que no tiene sentido introducir una operación finitaria π_E para la proyección $\pi_E(a) = a/E$, y Φ es un conjunto de fórmulas que puede ser infinito, de modo que incluso cuando a sea finita no podemos formular el axioma que rige el uso de π_E en el lenguaje de la lógica de primer orden. En consecuencia, el tratamiento de los hiperimaginarios en teoría de modelos debe ser indirecto y necesariamente más complejo que el proporcionado a los imaginarios.

Consideremos, para empezar, las nociones de clausura definible y clausura algebraica en el universo hiperimaginario. La clausura definible hiperimaginaria $\mathrm{dcl}^{\mathrm{heq}}(A)$ de un conjunto de hiperimaginarios A es la clase formada por todos los hiperimaginarios con la propiedad de ser fijados por cualquier automorfismo que fija a todos los elementos de A. Esta noción extiende correctamente a la que usábamos para imaginarios: si A es un conjunto de imaginarios, $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{heq}}(A) \cap \mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$. Algo similar ocurre para la clausura algebraica. Definimos la clausura algebraica hiperimaginaria $\mathrm{acl}^{\mathrm{heq}}(A)$ de un conjunto de hiperimaginarios A como la clase de los hiperimaginarios que tienen una órbita finita en el grupo de automorfismos que fijan todos los elementos de A. También en este caso no hay nada nuevo si A es un conjunto de imaginarios pues $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A) = \mathrm{acl}^{\mathrm{heq}}(A) \cap \mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$. En el ámbito imaginario hay una tercera operación de clausura, la *clausura acotada* $\mathrm{bdd}(A)$ de un conjunto A de hiperimaginarios. Es la clase formada por los hiperimaginarios que tienen órbita acotada —es decir, una órbita que es un conjunto y no una clase propia— en la acción del grupo de los automorfismos que fijan cada elemento de A. Esta operación no tenía interés en el universo imaginario porque no era más que otra versión de la clausura algebraica ya que $\mathrm{bdd}(A) \cap \mathbb{C}^{\mathrm{eq}} = \mathrm{acl}^{\mathrm{heq}}(\mathrm{A}) \cap \mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ y por tanto si A es un conjunto de imaginarios $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A) = \mathrm{bdd}(A) \cap \mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$. Pero es una operación muy natural e interesante en el universo hiperimaginario y a muchos efectos es el adecuado paralelo de la clausura algebraica imaginaria. Por ejemplo, se puede mostrar que $\mathrm{bdd}(A)$ es la intersección de todas las clausuras definibles hiperimaginarias de los modelos que contienen a A.

Digamos que dos objetos —hiperimaginarios, secuencias de hiperimaginarios u objetos más complicados— son equivalentes si son fijados por los mismos automorfismos. Pues bien, toda secuencia de hiperimaginarios, cualquiera que sea su longitud, es equivalente a un hiperimaginario. Del mismo modo que en el universo imaginario perdía importancia la diferencia entre elementos y tuplas finitas, en el hiperimaginario pierde importancia la diferencia entre elementos y secuencias de elementos. Incluso la diferencia entre elementos y conjuntos se desvanece en un cierto sentido: si A es un conjunto de hiperimaginarios y lo enumeramos mediante una secuencia de hiperimaginarios a y obtenemos a continuación un hiperimaginario e equivalente a a, resulta que $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/A) = \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/e)$ de manera que a muchos efectos podemos sustituir A por e. Esta situación ha llevado a algunos investigadores a afirmar a modo de lema inspirador para guiar la aventura de exploración del universo hiperimaginario: ¡cualquier cosa es un hiperimaginario!.

El primer problema que se presenta al intentar desarrollar la lógica hiperimaginaria es el de especificar qué es el tipo $\mathrm{tp}(a/A)$ de un hiperimaginario a sobre un conjunto de hiperimaginarios A. Por lo indicado antes, basta tratar el caso del tipo $\mathrm{tp}(a/b)$ de un hiperimaginario a sobre otro hiperimaginario b. La idea rectora es que debe ocurrir $\mathrm{tp}(a/b) = \mathrm{tp}(c/b)$ cuando y sólo cuando a y c estén en la misma órbita bajo los automorfismos que fijan b. Como no podemos usar fórmulas en las que intervenga b como parámetro, hay que recurrir a algún método indirecto para definir explícitamente $\mathrm{tp}(a/b)$. Supongamos que $a = a'/E$, que $b = b'/F$ y que las relaciones de equivalencia E y F son definibles respectivamente mediante los tipos $\Phi(x,y)$ y $\Psi(x,y)$. Se define entonces $\mathrm{tp}(a/b)$ como el conjunto de todas fórmulas de la forma $\exists uv(\varphi(x,u)\wedge\psi(v,b')\wedge\theta(u,v))$ siendo $\varphi(x,y)$ una conjunción de fórmulas de $\Phi(x,y)$, $\psi(x,y)$ una conjunción de fórmulas de $\Psi(x,y)$ y $\theta(u,v)$ una fórmula tal que $\mathbb{C}\models\theta(a'',b'')$ para algún a'' y algún b'' tales que $E(a',a'')$ y $F(b',b'')$. Sirva esto como botón de muestra de la sofisticación que requiere la teoría de modelos de los hiperimaginarios. Pese a esas dificultades, se ha realizado el esfuerzo de adaptación de las nociones fundamentales de la teoría de modelos a este contexto, incluyendo la presentación de la teoría de indiscernibles y la teoría de la bifurcación. Ese trabajo ha sido necesario para poder usar las ventajas de disponer de bases canónicas en las teorías simples.

Aunque ello no es evidente y verificarlo requiere un cierto trabajo, $\mathrm{bdd}(A)$ es equivalente a un hiperimaginario, de manera que podemos hablar de tipos sobre $\mathrm{bdd}(A)$ en el sentido recién indicado. Ello resulta ser de capital importancia para el estudio de los tipos fuertes de Lascar en las teorías simples. En una teoría simple dos tuplas a,b tienen el mismo tipo fuerte de Lascar sobre el conjunto A si y sólo si $\mathrm{tp}(a/\mathrm{bdd}(A)) = \mathrm{tp}(b/\mathrm{bdd}(A))$. Del mismo modo que los tipos fuertes podían definirse como tipos sobre $\mathrm{acl}^{eq}(A)$, podemos ahora definir los tipos fuertes de Lascar como tipos sobre bdd(A). Éste es un beneficio inesperado del uso de los hiperimaginarios.

También la teoría de Galois desarrollada inicialmente por Lascar se entiende mejor trabajando con hiperimaginarios. Hrushovski y Pillay, de modo independiente, observaron que el grupo de permutaciones elementales de bdd(A) es un grupo topológico compacto y Hausdorff en cualquier teoría y que coincide con Gal($\mathbb{C}$/A) en las teorías G-compactas. Lascar y Pillay mostraron que el grupo inicialmente definido por Lascar es un grupo topológico, aunque no necesariamente Hausdorff, en todas las teorías y que es Hausdorff —y coincide con el grupo de Pillay y Hrushovski— precisamente cuando T es G-compacta. Surgen así tres grupos de Galois. Sus relaciones han sido estudiadas inicialmente por Casanovas, Lascar, Pillay y Ziegler [Casanovas, Lascar, Pillay & Ziegler (2001)] y posteriormente por L. Newelski [Newelski (2003)]

Se dice que un hiperimaginario a/E es *finitario* si a es una secuencia de longitud finita. Lascar y Pillay [Lascar & Pillay (1998)] demostraron que todo hiperimaginario $e \in \mathrm{bdd}(A)$ es equivalente a una secuencia de hiperimaginarios finitarios de bdd(A), de manera que uno de los obstáculos del tratamiento lógico de los hiperimaginarios —la longitud infinita de las secuencias— desaparece en ese contexto. Apoyándose en ese resultado establecieron una correspondencia de Galois para el grupo Gal($\mathbb{C}$/A) que vale en cualquier teoría y que se apoya de modo esencial en el uso de hiperimaginarios finitarios. Concretamente demostraron que hay una correspondencia biunívoca entre conjuntos definiblemente cerrados B de hiperimaginarios finitarios tales que $A \subseteq B \subseteq \mathrm{bdd}(A)$ y subgrupos cerrados de Gal($\mathbb{C}/A$).

VI. Eliminación de hiperimaginarios

Como hemos visto en la sección anterior, los hiperimaginarios son necesarios para disponer de bases canónicas en las teorías simples y tienen además aplicaciones nada desdeñables a los tipos fuertes de Lascar y a la teoría general de Galois. Presentan bastantes retos para la lógica y la teoría de modelos, dado que no se acomodan en una estructura y no se dejan tratar fácilmente como objetos. No es de extrañar que exista un gran interés en conseguir su eliminación.

Se dice que una teoría T tiene *eliminación de hiperimaginarios* o que T *elimina los hiperimaginarios* si en T todo hiperimaginario es equivalente a una secuencia de imaginarios. Claro está, si T elimina los hiperimaginarios, entonces no hay necesidad ninguna de usarlos en T y todas sus aplicaciones pueden llevarse a cabo mediante meros imaginarios.

La eliminación no siempre es posible. Por ejemplo, los infinitesimales son hiperimaginarios en la teoría del cuerpo ordenado de los números reales y no pueden ser eliminados en favor de secuencias de imaginarios. Pillay y Poizat [Pillay & Poizat (1987)] demostraron que las teorías estables eliminan los hiperimaginarios, antes incluso de que los hiperimaginarios tuvieran carta de naturaleza. Ha habido en los últimos años mucho esfuerzo dedicado a averiguar si las teorías simples los eliminan o no, y hay varios resultados parciales que comentaremos a continuación, pero la pregunta planteada en toda su generalidad sigue todavía esperando respuesta.

La eliminación de los hiperimaginarios y la eliminación de los imaginarios son problemáticas de naturaleza muy distinta. Hay teorías de cualquier complejidad —en el sentido de la teoría de la estabilidad— con y sin eliminación de imaginarios. Si se eligen adecuadamente los universos sobre los que habla la teoría siempre se puede reformular la teoría de modo que tenga eliminación de imaginarios. La eliminación de hiperimaginarios parece tener mucho más que ver con la complejidad de la teoría y no es probable que pueda solucionarse mediante una modificación del lenguaje.

Junto a la cuestión de la eliminación de los hiperimaginarios, hay otro problema —muy relacionado con el primero— que se considera del máximo interés y que todavía sigue por resolver en el caso de las teorías simples. Es el problema de los tipos fuertes de Lascar. Consiste en si los tipos fuertes coinciden o no con los tipos fuertes de Lascar. En las teorías simples puede reformularse como la cuestión de si los tipos fuertes son o no bases de amalgamación. En cualquier teoría G-compacta, y en particular en cualquier teoría simple, la eliminación de hiperimaginarios implica que los tipos fuertes son lo mismo que los tipos fuertes de Lascar. Por tanto el problema está resuelto para las teorías estables. Hay un ejemplo, debido a Poizat, pero explicado en Lascar (1982), de una teoría donde estos tipos difieren. Es la teoría de un modelo que tiene dos partes, el cuerpo de los números reales por un lado y un círculo por otro. La conexión entre las dos partes es una aplicación que asigna a cada dos puntos del círculo el ángulo que forman en sentido horario. No se sabe si hay alguna teoría simple en la que los tipos fuertes y los tipos fuertes de Lascar sean distintos.

Los dos problemas reseñados pueden enunciarse en términos de relaciones de equivalencia de modo asombrosamente sencillo. La cuestión de la eliminación de los hiperimaginarios consiste en establecer que siempre que tengamos una relación de equivalencia E entre realizaciones de un tipo completo $p(x)$, si E es tipo definible, entonces hay una colección de relaciones de equivalencia definibles cuya intersección coincide con E. Es esencial que la relación esté establecida entre realizaciones de un tipo completo, pues se conocen teorías estables en las que hay relaciones de equivalencia que son tipo definibles y que no son intersección de relaciones definibles. Para teorías G-compactas el problema de coincidencia de los tipos fuertes con los tipos fuertes de Lascar se reformula de modo análogo, con la única salvedad de que se exige adicionalmente que la relación E tenga un número acotado de clases de equivalencia.

Son, por tanto, problemas que se enuncian con facilidad en términos de nociones muy elementales pero cuya resolución presenta serias dificultades.

El primer avance lo obtuvo S. Buechler [Buechler (1999)] al aislar una clase de teorías simples que extiende propiamente a las estables y en la que los tipos fuertes y los tipos fuertes de Lascar coinciden. Se llaman *teorías bajas* —*low theories*, en inglés— y se desconoce todavía si eliminan los hiperimaginarios. Es una clase importante de teorías que incluye a todos los ejemplos originalmente conocidos. Durante un cierto tiempo se dudó de la existencia de teorías simples no bajas aunque ahora se conocen diversos ejemplos.

El segundo momento de progreso se debió a Kim, quien [Kim (1998)] mostró que las teorías simples *pequeñas* —*small*, en inglés— eliminan los hiperimaginarios finitarios, lo cual proporciona una solución positiva al problema de coincidencia de tipos fuertes y tipos fuertes de Lascar. Entre las teorías pequeñas se cuentan las teorías ω-categóricas, de modo que no es un resultado insustancial.

El verdadero paso de gigante lo dieron Buechler, Pillay y Wagner al demostrar [Buechler, Pillay & Wagner (2000)] que las teorías supersimples eliminan los hiperimaginarios. Las teorías *supersimples* conforman una subclase de extrema importancia dentro de las teorías simples. No contiene a todas las teorías estables pero sí a las superestables. Los ejemplos originarios relevantes de teorías simples inestables son todos ejemplos de teorías supersimples.

No ha habido éxito todavía en la búsqueda de un ejemplo de una teoría simple que no elimine los hiperimaginarios o en la que los tipos fuertes difieran de los tipos fuertes de Lascar. Los contraejemplos conocidos antes comentados son teorías de estructuras linealmente ordenadas, por lo cual distan mucho de las teorías simples. Shelah, en el curso de su investigación sistemática de la clasificación de las teorías completas formuladas en la lógica de primer orden, introdujo la noción de teorías con la *propiedad estricta del orden*. Son las teorías que poseen un orden parcial no trivial de $\mathfrak{C}^n$ para algún n. En particular las estructuras linealmente ordenadas tienen la propiedad estricta del orden, pero también la tienen estructuras con órdenes no lineales, como cualquier álgebra de Boole infinita. Las teorías simples son una subclase de las teorías sin la propiedad estricta del orden. En Casanovas & Wagner (∞) se ofrece un ejemplo de una teoría sin la propiedad estricta del orden —por tanto muy próxima a las teorías simples— que no elimina los hiperimaginarios.

Es muy difícil predecir cuál será la solución definitiva, aunque la gran riqueza y variedad de teorías simples que se van conociendo hace plausible la creencia de que algunas de ellas sean contraejemplos a estas cuestiones. Algún investigador de renombre ha llegado a anunciar la obtención de un contraejemplo y el anuncio se ha mantenido durante cinco meses, pero lamentablemente han surgido dificultades en la verificación de los detalles y las lagunas de la demostración no han podido ser sorteadas. No sabemos, pues, si debemos resignarnos a convivir con los hiperimaginarios o si vamos a ser capaces de eliminarlos definitivamente de las teorías simples. Las dos perspectivas ofrecen alicientes.

Departamento de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia
Universidad de Barcelona
Baldiri Reixac s/n 08028 Barcelona
E-mail: *e.casanovas@ub.edu*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BUECHLER, S. (1999), "Lascar strong types in some simple theories", *The Journal of Symbolic Logic* 64, pp. 817-824.

BUECHLER, S., PILLAY, A. & WAGNER, F.O (2000), "Supersimple theories", *Journal of the American Mathematical Society* 14, pp. 109-124.

CASANOVAS, E., LASCAR, D., PILLAY, A. & ZIEGLER, M. (2001), "Galois groups of first order theories", *Journal of Mathematical Logic* 1, pp. 305-319.

CASANOVAS, E. & WAGNER, F. O.(∞) "The free roots of the complete graph". Por aparecer en *Proceedings of the American Mathematical Society*.

HART, B., KIM , B. & PILLAY, A. (2000) "Coordinatisation and canonical bases in simple theories", *The Journal of Symbolic Logic* 6, pp. 293-309.

KIM, B. (1998) "A note on Lascar strong types in simple theories", *The Journal of Symbolic Logic* 63, pp. 926-936.

LASCAR, D. (1982), "On the category of models of a complete theory", *The Journal of Symbolic Logic* 47, pp. 249-266.

LASCAR, D. & PILLAY, A. (2001), "Hyperimaginaries and automorphism groups", *The Journal of Symbolic Logic* 66, pp. 127-143.

NEWELSKI, L. (2003), "The diameter of a Lascar strong type", *Fundamenta Mathematicae* 17, pp. 157-170.

PILLAY, A. & POIZAT, B. (1987), "Pas d'imaginaires dans l'infini!", *The Journal of Symbolic Logic* 52, pp. 400-403.

POIZAT, B. (1983), "Une théorie de Galois imaginaire", *The Journal of Symbolic Logic* 48, pp. 1151-1170.