teorema
Vol. XXII/3, 2004, pp.17-36

Demostrar teoremas con *forcing*

Roger Bosch

RESUMEN

Desde la aparición de la técnica de *forcing* en los años 60 se ha obtenido un gran número de resultados de consistencia relativa —resultados del tipo "si *T* es una teoría consistente, también lo es la teoría *T'*". Sin embargo, con ayuda de las técnicas apropiadas, se pueden usar argumentos de forcing para demostrar teoremas. En este artículo se explican las ideas fundamentales en las que se basa este tipo de argumentos.

ABSTRACT

Since the method of forcing appeared in the early 60's, a vast array of relative consistency results — results stating that "if a theory *T* is consistent, then so is the theory *T'*" — have been obtained. However, we also can use forcing arguments to prove theorems. In this paper, we explain the philosophy behind this type of arguments.

I. INTRODUCCIÓN

La interpretación natural de los axiomas *ZFC* —Zermelo-Fraenkel más el Axioma de Elección— de la Teoría de Conjuntos es la jerarquía acumulativa de los conjuntos, V. Esta se define por inducción transfinita sobre los ordinales. Esto es, para cada ordinal α, y suponiendo que ya esté definido V_β para todo ordinal $\beta<\alpha$, se define V_α. El modelo V es entonces la unión de todos los V_α. Más precisamente:

- V_0 es el conjunto vacío.
- Si $\alpha=\beta+1$, V_α es el conjunto de todos los subconjuntos de V_β. Es decir, la colección $P(V_\beta)$ de todos los conjuntos cuyos elementos pertenecen a V_β.
- Si α es un ordinal límite, V_α es la unión de todos los V_β; β menor que α.
- V es la unión de todos los V_α; α un ordinal.

Así, esta jerarquía tiene como base el conjunto vacío; en un estrato $V_{\alpha+1}$ inmediatamente posterior a un estrato V_α aparecen todos los conjuntos cuyos elementos pertenecen al estrato V_α; y en V_α, con α límite, se agrupan todos los conjuntos de los estratos anteriores, y se toma como base para seguir formando conjuntos. Un conjunto es cualquier objeto que aparece en esta jerarquía.

Sabemos que existen enunciados que son independientes de los axiomas de la Teoría de Conjuntos, es decir, enunciados que no se deducen ni él ni su negación de *ZFC*. Dos ejemplos de enunciados independientes de *ZFC* son la Hipótesis del Continuo y el Problema de la Medida.

I.1. *La Hipótesis del Continuo*

ZFC implica que todo conjunto es biyectable con algún ordinal. El menor ordinal con el que un conjunto es biyectable es el cardinal del conjunto. Los números cardinales son pues ordinales que nos sirven para medir el número de elementos de los conjuntos. Los cardinales finitos, 0, 1, 2, 3,... miden la cardinalidad de los conjuntos finitos. Cantor extendió el concepto de cardinal a los conjuntos infinitos y demostró que hay distintos cardinales infinitos. Los cardinales $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$,... miden la cardinalidad de los conjuntos infinitos. Como en el caso de los números naturales, los cardinales infinitos están bien ordenados: $\aleph_0$, el menor cardinal infinito, es precisamente el cardinal del conjuto de los números naturales, ω. $\aleph_1$ es el cardinal inmediatamente mayor que $\aleph_0$. Cantor también fue capaz de demostrar que la cardinalidad de $P(\omega)$, de $\mathbb{R}$ y de ω^ω es $2^{\aleph_0}$ pero no pudo demostrar a qué cardinal infinito correspondía $2^{\aleph_0}$. El *Problema del Continuo* consiste en determinar el ordinal α tal que $2^{\aleph_0}=\aleph_\alpha$. Cantor conjeturó que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, el menor cardinal posible. Esta última igualdad es la forma habitual de formular la *Hipótesis del Continuo* (en adelante *HC*).

I.2. *El Problema de la Medida*

Una medida sobre un conjunto infinito A es una función μ que asigna a los subconjuntos de A un número real en el intevalo [0,1] con las siguientes propiedades:

1. $\mu(\emptyset)=0$ y $\mu(A)=1$.
2. Si $X\subseteq Y$, entonces $\mu(X)\leq\mu(Y)$.
3. μ es *no trivial*: para todo $x\in A$, $\mu(\{x\})=0$.
4. μ es σ-*aditiva*: si $\{X_n:n\in\omega\}$ es una familia de subconjuntos disjuntos dos a dos, entonces $\mu(\bigcup_{n\in\omega}X_n)=\Sigma_{n\in\omega}\mu(X_n)$.

Intuitivamente, podemos considerar una medida sobre un conjunto A como una función que asigna la probabilidad, a los subconjuntos de A, de que un elemento de A dado al azar pertenezca al subconjunto. Así, si X es un subconjunto de medida 0, entonces la probabilidad de que un elemento de A elegido al azar pertenezca a X es 0. En este sentido, una medida sobre A también es una manera de medir el tamaño de los subconjuntos de A: cuanto mayor sea el número real asignado tanto mayor es la probabilidad de pertenecer a él y mayor es el subconjunto. El *Problema de la Medida* es si hay algún conjunto A para el que exista una medida.

Los anteriores enunciados son sólo dos de una multitud de ejemplos de enunciados matemáticos fundamentales e independientes de *ZFC*. De hecho, si *ZFC* es consistente, si está libre de contradicciones, entonces es necesariamente una teoría[1] incompleta, es decir, habrá enunciados independientes de ella. El Primer Teorema de Incompletud de Gödel [Gödel (1967)] afirma que toda teoría consistente y que contenga la artimética elemental es incompleta. El Segundo Teorema de Incompletud de Gödel [Gödel (1967)] afirma que toda teoría que contenga la aritmética elemental, si es consistente, no demuestra su propia consistencia[2]. Así *ZFC*, si es consistente, dado que todos los enunciados de la aritmética son demostrables en ella, es una teoría incompleta. De hecho sabemos por el Segundo Teorema de Incompletud que el enunciado aritmético que afirma la consistencia de *ZFC* es independiente de ella (de nuevo, si es consistente).

No es una buena solución aceptar que la independencia de *HC* o del Problema de la Medida son simplemente manifestaciones de la incompletud de *ZFC* y conformarse con ello. En primer lugar, *HC* y el enunciado "Existen un conjunto A y una función μ tales que μ es una medida sobre A" deben ser o bien verdaderos o bien falsos en V. Sabemos que $P(\omega)$ es biyectable con un cardinal y que todo cardinal es de la forma $\aleph_\alpha$ para algún ordinal α, luego en V existe una función biyectiva de $P(\omega)$ en $\aleph_\alpha$, para algún ordinal α mayor que 0. Entonces, o bien $\alpha=1$, y *HC* es verdadera, o bien $\alpha>1$, y *HC* es falsa. Una observación similar se aplica para el caso del Problema de la Medida.

En segundo lugar, *HC* y el Problema de la Medida son proposiciones relativamente simples de formular, aparecen pronto en el estudio de los conjuntos y son muy naturales. El Problema del Continuo es fundamental en tanto que es una cuestión sobre la cantidad de números reales. Por otro lado, una respuesta afirmativa al Problema de la Medida ha revelado que tiene nuevas consecuencias incluso en áreas en principio tan alejadas de la teoría de la medida como, por ejemplo, los subconjuntos definibles de $P(\omega)$, la Teoría Descriptiva de Conjuntos. Algo que en principio no era esperable. Pero además, estas consecuencias encajan con otros resultados ya conocidos en Teoría Descriptiva de Conjuntos. Así pues, son proposiciones muy interesantes desde un punto de vista matemático. En cambio, las proposiciones independientes de *ZFC* que los teoremas de incompletud de Gödel afirman que existen son de distinto tipo. Estas proposiciones vienen a decir algo como "yo no soy demostrable" o "*ZFC* es consistente" y sólo lo expresan a través de sofisticadas técnicas de aritmetización del lenguaje de la Teoría de Conjuntos.

Cabe otra actitud ante los fenómenos de independencia. Esta consiste en considerar que los axiomas *ZFC* nos permiten describir la estructura de V de forma precisa, pero no son lo bastante potentes como para decidir a partir de ellos cualquier cuestión sobre los conjuntos. Así, los enunciados independientes de *ZFC* sólo muestran que hay que añadir nuevos axiomas a *ZFC* que decidan las proposiciones independientes que son matemáticamente interesantes o básicas, como *HC* o el Problema de la Medida.

Estos nuevos axiomas deberían proceder de un análisis más detallado de V para encontrar los aspectos que *ZFC* no logra reflejar. Si examinamos la definición recursiva de V, nos daremos cuenta de que hay dos aspectos de V respecto a los que *ZFC* no nos proporciona mucha información. En primer lugar, notemos que conocemos perfectamente qué hay en V_0. También sabemos que en V_α, con α límite, no aparecen nuevos conjuntos. Así, los conjuntos sólo aparecen en los $V_{\alpha+1}$, donde están todos los subconjuntos de V_α. Pero esto no nos dice gran cosa sobre qué conjuntos hay. Los axiomas *ZFC* —excepto los axiomas de Extensionalidad y de Regularidad— permiten afirmar que algunos conjuntos aparecen en los estratos $V_{\alpha+1}$. Por ejemplo, el *Axioma del Conjunto Par* nos permite afirmar que el conjunto $\{x,y\}$ pertenece al estrato $V_{\alpha+1}$, si x,y están en el estrato V_α; el *Axioma del Conjunto Potencia* nos permite afirmar que el conjunto $P(x)$ formado por todos los subconjuntos de x pertenece al estrato $V_{\alpha+1}$, si x está en V_α, etc. Pero no dan una respuesta completa a la pregunta de cuáles son los conjuntos que aparecen en cada uno de los estratos $V_{\alpha+1}$. Esto es lo que podríamos llamar *el problema de la amplitud de V*.

El problema de la altura de V es que sabemos que irán apareciendo nuevos conjuntos mientras tengamos ordinales de la forma $\alpha+1$. Por lo tanto qué conjuntos haya en V también depende de cuantos ordinales hay. *ZFC* implica que los ordinales forman una clase propia. Sin embargo esta tampoco es una respuesta demasiado satisfactoria a la pregunta sobre qué ordinales hay.

II. UN EJEMPLO DEL PROBLEMA DE LA AMPLITUD DE V

Como ejemplo del problema de la amplitud de V y de cómo esta influye en la Teoría de Conjuntos, tenemos el universo de los conjuntos construibles de Gödel [Gödel (1938, 1939 y 1940)]. El universo de los conjuntos construibles, L, se obtiene de forma similar a la jerarquía de los conjuntos pero empleando sólo conjuntos definibles. Es decir,

- L_0 es el conjunto vacío.
- Si $\alpha=\beta+1$, L_α es el conjunto de todos los subconjuntos definibles en L_β con parámetros. Esto es, todos los subconjuntos X de L_β tales que $X=\{x:\varphi(x,a_0,...,a_n)$ es verdadera en $L_\beta\}$, donde $\varphi(x,a_0,...,a_n)$ es una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos con parámetros $a_0,...,a_n\in L_\beta$.
- Si α es un ordinal límite, L_α es la unión de todos los L_β; β menor que α.
- L es la unión de todos los L_α; α un ordinal.

La única diferencia en la contrucción de V y L radica en que, en $L_{\alpha+1,}$ en lugar de poner todos los subconjuntos del estadio anterior, como en $V_{\alpha+1}$, sólo ponemos aquellos que son definibles en L_α con parámetros en L_α.

L es el menor modelo de *ZF* (los axiomas de la Teoría de Conjuntos menos el *Axioma de Elección*) que contiene todos los ordinales. En *L* son verdaderos todos los axiomas de *ZF* ya que todos ellos, excepto Extensionalidad y Regularidad, afirman que ciertos conjuntos existen, son axiomas de existencia. Pero además todos estos axiomas nos proporcionan una definición del conjunto cuya existencia afirman. Así, dado que en *L* están todos los conjuntos hereditariamente definibles (i.e., conjuntos definibles cuyos elementos son todos ellos conjuntos definibles cuyos elementos son definibles, etc.), en *L* están todos los necesarios para satisfacer los axiomas de *ZF*. La razón de la minimalidad de *L* es que al estar sólo los conjuntos hereditariamente definibles a partir del conjunto vacío, todos estos conjuntos estarán en cualquier modelo de *ZF* con todos los ordinales. Así, cualquier otro modelo de *ZF* (con todos los ordinales) contendrá a *L* como un submodelo. En particular, $L \subseteq V$ y de hecho la relación de inclusión entre *L* y *V* se da estrato a estrato, es decir para cada ordinal α, $L_\alpha \subseteq V_\alpha$.

Lo más interesante del universo de los conjuntos construibles es que en él son verdaderos el Axioma de Elección, pues se puede definir en *L* un buen orden de todos los conjuntos construibles, y también es verdadera *HC*. Gödel postula entonces el *Axioma de Construibilidad*, *V=L*, que afirma que todos los conjuntos son construibles. De hecho, como el único modelo, con todos los ordinales, de *ZFC+V=L* es *L*, de *ZFC+V=L* se sigue *HC*. El argumento de Gödel es, en líneas generales, el siguiente: supongamos que *ZFC* es consistente; así *ZFC* tiene un modelo. Definimos la jerarquía *L* en el modelo dado por recursión tranfinita como en el inicio de esta sección. Entonces *L* es modelo de *ZFC+V=L* y, por lo tanto, de *HC*. Así pues, si tenemos un modelo de *ZFC*, entonces también tenemos un modelo de *ZFC+HC*. Luego Gödel demostró:

TEOREMA. Si *ZFC* es consistente, entonces también lo es *ZFC+HC*.

No debería ser nada sorprendente que *HC* sea verdadera en *L*: en el menor modelo (con todos los ordinales) de *ZFC*, la cardinalidad del continuo es la menor que, según *ZFC*, puede ser.

Si consideramos que el *Axioma de Construibilidad* es falso, es decir que hay conjuntos que no son construibles, y hay buenas razones para considerar que ello es así (véase el final de la sección siguiente y la nota 3), podemos ver qué es lo que en realidad sucede al añadirlo a *ZFC*. Lo que en realidad estamos haciendo es "estrechar" *V* al igualarlo a la menor clase que satisface *ZFC*. Recordemos que para cada ordinal α, $L_\alpha \subseteq V_\alpha$. De hecho, en *ZFC*, podemos demostrar que para muchos de estos ordinales la inclusión es propia. Por ejemplo, dado que $P(\omega) \subseteq V_{\omega+1}$, en $V_{\omega+1}$ hay al menos $2^{\aleph_0}$ conjuntos. Sin embargo, como sólo hay $\aleph_0$ fórmulas del lenguaje de la Teoría de Conjuntos y en L_ω sólo hay $\aleph_0$ conjuntos, a lo sumo hay $\aleph_0$ conjuntos definibles en L_ω con parámetros en L_ω. Así pues en $L_{\omega+1}$ hay a lo sumo $\aleph_0$ conjuntos. Por lo tanto, $L_{\omega+1} \subseteq V_{\omega+1}$ y $L_{\omega+1} \neq V_{\omega+1}$. Esta relación es la que se da en todos los ordinales sucesores. Si $V=L$, entonces hay una clase propia de ordinales límite α tales que $L_\alpha=V_\alpha$. En este sentido, $V=L$ afirma que la jerarquía de los conjuntos construibles es sólo más parsimoniosa que la jerarquía acumulativa: en L aparecen todos los conjuntos, pero aparecen más lentamente. En cambio, si $V\neq L$, entonces hay una clase propia de ordinales, de hecho un segmento final de ordinales, en los que la inclusión es propia. En este sentido, al añadir $V=L$ estrechamos significativamente el universo de la Teoría de Conjuntos.

III. Los axiomas de grandes cardinales

El Problema de la Medida, en cambio, está relacionado con la cuestión de la altura de V. Digamos que κ es un cardinal medible sii hay una medida bi-valorada sobre κ. Esto es, hay una medida μ tal que para todo $X\subseteq\kappa$, $\mu(X)=0$ ó $\mu(X)=1$. Es claro que existe una medida bi-valorada sobre algún conjunto sii existe un cardinal medible. Ulam [Ulam (1930)] demostró que la existencia de los cardinales medibles es independiente de *ZFC*. Por lo tanto, el problema de la medida depende de la altura de V. Si hay cardinales medibles, entonces hay un conjunto para el cual existe una medida. Y viceversa, si no hay cardinales medibles, entonces no existe ningún conjunto para el cual exista una medida (bi-valorada).

El axioma que afirma que existen cardinales medibles es un ejemplo de axioma de gran cardinal. Un axioma de gran cardinal es un enunciado que afirma que existen cardinales con ciertas propiedades no triviales. Otro ejemplo de un axioma de gran cardinal es el *Axioma de los Cardinales Inaccesibles* que afirma que existen cardinales inaccesibles. Un cardinal κ es inaccesible sii κ es un cardinal infinito no numerable, regular (esto es, no es una unión de menos de κ conjuntos todos ellos de cardinalidad menor que κ) y límite fuerte (para todo cardinal $\lambda<\kappa$, $2^\lambda<\kappa$). Los cardinales inaccesibles son cardinales que se comportan respecto a los cardinales menores de la misma forma que el cardinal $\aleph_0$ se comporta respecto a los cardinales finitos: la unión de una cantidad finita de conjuntos todos ellos finitos es un conjunto finito (i.e., de cardinalidad menor que $\aleph_0$) y para todo número natural n, $2^n<\aleph_0$.

Hasta cierto punto, los axiomas de grandes cardinales son semejantes al *Axioma de Infinitud*, que afirma que existe un conjunto infinito. La teoría *ZFC* menos el *Axioma de Infinitud* es equivalente a *AP*, la Aritmética de Peano. Al añadir el *Axioma de Infinitud* obtenemos una teoría mucho más potente, ya que:

1) Todos los axiomas y teoremas de *AP* son teoremas de *ZFC*, $ZFC\vdash AP$;
2) La consistencia de *AP* también es un teorema de *ZFC*, $ZFC\vdash \mathrm{Con}(AP)$;
3) Si *AP* es consistente, por el Segundo Teorema de Incompletud de Gödel, no puede demostrar su propia consistencia, $AP\nvdash \mathrm{Con}(AP)$.

Es decir, *ZFC* es estrictamente más potente que *AP* ya que demuestra todo lo que *AP* demuestra (1) y además demuestra enunciados aritméticos (2) que *AP* no puede demostrar (3). Los axiomas de grandes cardinales se comportan de forma similar respecto a *ZFC*. Por ejemplo, si κ es un cardinal inaccessible, entonces V_κ es modelo de todos los axiomas de *ZFC*. Por lo tanto, si con *ZFCI* nos referimos a la teoría *ZFC*+*Axioma de los Cardinales Inaccessibles*, tenemos que

1) Todos los axiomas y teoremas de *ZFC* son axiomas o teoremas de *ZFCI*, $ZFCI \vdash ZFC$;
2) La consistencia de *ZFC* también es un teorema de *ZFCI*, $ZFCI \vdash \mathrm{Con}(ZFC)$;
3) Si *ZFC* es consistente, por el Segundo Teorema de Incompletud de Gödel, no puede demostrar su propia consistencia, $ZFC \nvdash \mathrm{Con}(ZFC)$.

Lo mismo sucede si a *ZFC* le añadimos el *Axioma de Cardinales Medibles*, *M*, en lugar del *Axioma de los Cardinales Inaccesibles*.

Además, si κ es un cardinal medible, entonces es inaccesible y hay κ cardinales inaccesibles menores que κ. Por lo tanto, el menor cardinal inaccesible no es un cardinal medible y si κ es un cardinal medible V_κ es modelo de *ZFCI*. Luego la relación que hay entre *ZFCI* y *ZFCM* es la misma que la que hay entre *ZFC* y *ZFCI*:

1) Todos los axiomas y teoremas de *ZFCI* son axiomas o teoremas de *ZFCM*, $ZFCM \vdash ZFCI$;
2) La consistencia de *ZFCI* también es un teorema de *ZFCM*, $ZFCM \vdash \mathrm{Con}(ZFCI)$;
3) Si *ZFCI* es consistente, por el Segundo Teorema de Incompletud de Gödel, no puede demostrar su propia consistencia, $ZFCI \nvdash \mathrm{Con}(ZFCI)$.

Esta relación entre los cardinales inaccesibles y los cardinales medibles es la relación prototípica entre los grandes cardinales. La relación de consistencia entre axiomas de grandes cardinales —un axioma de gran cardinal A_0 está relacionado con otro axioma A_1 sii (1), (2) y (3) de los ejemplos anteriores se da entre $ZFCA_0$ y $ZFCA_1$— es una relación bien fundada: empieza con *ZFC*, seguido inmediatamente por el *Axioma de los Cardinales Inaccesibles*, después el *Axioma de los Cardinales Mahlo*, etc. Los axiomas de grandes cardinales dan lugar así a una jerarquía de teorías cada una estrictamente más potente que la anterior.

Esta jerarquía además nos sirve para medir la consistencia de los enunciados independientes de *ZFC*. Supongamos que φ es un enunciado independiente de *ZFC*, entonces se puede demostar que:

ZFC es consistente sii *ZFC*+φ es consistente, o bien, para algún axioma de gran cadinal *A*, se puede demostrar que:

ZFC+*A* es consistente sii *ZFC*+φ es concistente

Es decir, para todo enunciado φ independiente de *ZFC*, la consistencia de *ZFC*+φ es equivalente o bien a la consistencia de *ZFC* o a la consistencia de *ZFC* más algún axioma de gran cardinal. Esto es un hecho empírico, no hay argumentos *a priori* para demostrar que ello deba ser así. Pero hasta el momento presente, para todo enunciado independiente de *ZFC* considerado ha resultado ser así.

El hecho que los axiomas de grandes cardinales constituyan por sí mismos una jerarquía de teorías según la potencia y que además resulte que toda teoría que extienda a *ZFC* sea tan potente como *ZFC* o como *ZFC* más un axioma de gran cardinal justifica, si se quiere sólo por su utilidad, que los axiomas de grandes cardinales sean buenos candidatos para ser considerados verdaderos axiomas de la Teoría de Conjuntos. Otro hecho que los hace dignos de tal consideración desde un punto de vista práctico es que los axiomas de grandes cardinales implican algunos enunciados que son independientes de *ZFC* en la dirección esperada. Por ejemplo, ya mencionamos que el *Axioma de los Cardinales Medibles* implica que ciertos enunciados de la Teoría Descriptiva de Conjuntos son verdaderos. Es decir, los axiomas de grandes cardinales no sólo nos dan una escala para medir el grado de consistencia de los enunciados independientes de *ZFC*, sino que también implican algunos de estos enunciados. Así, estos axiomas no sólo nos dan una jerarquía de consistencia, sino que también implican que ciertos enunciados matemáticamente interesantes son verdaderos aunque ello no se pueda demostrar en *ZFC*.

Hay una justificación de los axiomas de grandes cardinales desde un punto de vista más teórico o filosófico: los axiomas de grandes cardinales constituyen un buen análisis del problema de la altitud de *V*. A primera vista, los axiomas de grandes cardinales pueden considerarse axiomas que afirman que el universo es lo bastante alto como para contener todos estos cardinales con estas propiedades. Por ejemplo, como ya hemos dicho, los cardinales inaccesibles generalizan algunas de las propiedades que $\aleph_0$ tiene respecto a los cardinales finitos. Así, el *Axioma de los Cardinales Inacesibles* nos dice que el universo es lo bastante alto, que hay ordinales bastantes, como para que $\aleph_0$ no sea el único cardinal con estas propiedades respecto a los cardinales menores que él.

Sin embargo hay una idea más profunda detrás de los grandes cardinales que explica mejor en qué sentido son todos ellos soluciones al problema de la altura de *V*. A saber, todos estos axiomas son algún tipo de principio de reflexión.

En 1959, Montague [Montague (1961)] demostró el Principio de Reflexión:

PRINCIPIO DE REFLEXIÓN. Para toda fórmula $\varphi(v_0,...,v_n)$, *ZFC* demuestra que para cualesquiera conjuntos $x_0,...,x_n$ y para todo ordinal α existe un ordinal $\beta>\alpha$ tal que

$$V_\beta \vDash \varphi(x_0,...,x_n) \text{ sii } V \vDash \varphi(x_0,...,x_n)$$

Lo que afirma el Principio de Reflexión es que toda fórmula verdadera en el universo V es verdadera ya en V_β para muchos ordinales β. Esto es lo que se quiere decir cuando hablamos de reflexión en V: lo que es verdad en el universo es reflejado en los segmentos iniciales, los estratos V_β.

Notemos que el Principio de Reflexión es un esquema de teorema: para cada fórmula del lenguaje de la Teoría de Conjuntos tenemos un teorema de *ZFC*. Notemos también que hubiésemos podido formular el Principio de Reflexión para conjuntos finitos de fórmulas en lugar de para una única fórmula. Simplemente debemos aplicar el Principio de Reflexión a la fórmula resultante de realizar la conjunción de todas las fórmulas del conjunto.

El Principio de Reflexión es un resultado óptimo en *ZFC*, si *ZFC* es consistente. Sabemos que *ZFC* tiene un número infinito de axiomas; si pudiéramos reflejar un número infinito de fórmulas, entonces, dado que todos los axiomas de *ZFC* son verdaderos en V, podríamos reflejarlos. Así *ZFC* demostraría que hay un ordinal α tal que todos los axiomas de *ZFC* son verdaderos en V_α; es decir, *ZFC* demostraría su propia consistencia. Pero ello es imposible por el Segundo Teorema de Incompletud de Gödel.

Levy [Levy (1960)] demostró que, en presencia de los demás axiomas de *ZFC*, el Principio de Reflexión es equivalente al *Axioma de Infinitud* más el *Axioma de Sustitución*. Así pues, el Principio de Reflexión es una manera de expresar que el universo V es alto, que los ordinales forman una clase propia. La idea que subyace al Principio de Reflexión es que el universo es tan grande que no se puede describir con una fórmula (o un conjunto finito de fórmulas). Todo aquello que sea verdadero de todo el universo queda incorporado en una parte del universo, en un segmento inicial de V, en un V_α. Sea $\varphi(v)$ una fórmula y supongamos que existe un b en V tal que $\varphi(b)$ es verdadera en V. El Principio de Reflexión afirma que existe un ordinal α tal que b pertenece a V_α y $\varphi(b)$ es verdadero en V_α. Es en este sentido que V incorpora en una parte propia lo que es verdadero en él. Además, hay un segmento inicial posterior, esto es un V_β con $\beta>\alpha$, en el que $\varphi(b)$ también es verdadero en V_β. Y así sucesivamente.

Los axiomas de grandes cardinales son principios de reflexión ya que implican que se dan fenómenos de reflexión para conjuntos más complejos de fórmulas. Por ejemplo, como ya hemos dicho, si κ es inaccesible, entonces V_κ es modelo de *ZFC*. Así, podemos considerar que el *Axioma de los Cardinales Inaccesibles* permite reflejar todos los axiomas de *ZFC* conjuntamente, un conjunto infinito de fórmulas, algo que con el Principio de Reflexión no podíamos. A este tipo de fenómenos nos referimos cuando decimos que los axiomas de grandes cardinales son principios de reflexión. Cuanto más grande sea el cardinal, más fuerte será la reflexión que permite. Algunos axiomas de grandes cardinales nos permiten reflejar conjuntos infinitos de fórmulas cada vez más complejos, otros axiomas lo que permiten es reflejar la reflexión, es decir, que el estrato V_κ ya refleja algunos conjuntos infinitos de fórmulas, etc. En este sentido, los axiomas de grandes cardinales atacan el problema de la altitud de V haciendo que V sea cada vez más y más indescriptible a través de los medios que la lógica pone a nuestro alcance.

Finalmente, otro punto a favor de los axiomas de grandes cardinales es que tienen consecuencias sobre el problema de la amplitud de V. Por ejemplo, Scott [Scott (1961)] demostró que la existencia de un cardinal medible implica que $V \neq L$[3]. Parece natural, pues, preguntarse si algún axioma de gran cardinal decide el Problema del Continuo. Sin embargo, pocos años después del descubrimiento de la técnica de *forcing*, Levy y Solovay [Levy y Solovay (1967)] idearon una aplicación del *forcing* que permite demostrar que para cualquier axioma de gran cardinal A, las teorías $ZFC+A+HC$ y $ZFC+A+\neg HC$ son ambas consistentes, si $ZFC+A$ lo es. Así pues, aunque hay una estrecha conexión entre ambas problemáticas, con los grandes cardinales no se soluciona todo ya que hay problemas, como el Problema del Continuo, que son puramente problemas de amplitud de V.

IV. La técnica de *forcing*

La técnica de *forcing* fue descubierta por el analista americano Paul Cohen en los años 60 [Cohen (1963), (1964) y (1966)] para demostrar la independencia de *HC*. Recordemos que Gödel había demostrado en 1938:

TEOREMA. Si *ZFC* es consistente, entonces también lo es *ZFC*+*HC*.

Gödel parte del universo V de la Teoría de Conjuntos y obteniene el universo constructible L que satisface *ZFC*+*HC*. Por lo tanto, si *ZFC* es consistente, *ZFC* no demuestra $\neg HC$. Cohen utilizó el *forcing* para demostrar:

TEOREMA. Si *ZFC* es consistente, entonces también lo es $ZFC+\neg HC$.

Para ello emplea la técnica de *forcing* que permite obtener a partir de cualquier modelo M de *ZFC*, un modelo N de *ZFC* en el que *HC* es falsa. El modelo N es esencialmente el resultado de añadir $\aleph_2$ nuevos subconjuntos de ω a M, con lo que *HC* será falsa en N. Así, como hay un modelo de *ZFC* en el que *HC* es falsa, *ZFC* no demuestra *HC*.

Para explicar con un poco más de detalle en qué consiste el *forcing*, centremonos en el caso de añadir un único subconjunto de ω en lugar de $\aleph_2$ —pues añadir $\aleph_2$ subconjuntos consistirá esencialmente en repetir $\aleph_2$ veces este proceso. Observemos que podemos identificar cada subconjunto X de ω con su función característica χ_X, la función de ω en $\{0,1\}$ tal que para cada número natural n,

$$\chi_X(n)=1 \text{ sii } n \in X$$

Así, añadir un subconjunto de ω es lo mismo que añadir una función de ω en $\{0,1\}$.

¿Qué significa "añadir" una función de ω en $\{0,1\}$ a un modelo de *ZFC*? Dos son las dificultades que hay tras esta pregunta: en primer lugar, ¿de dónde sacamos la función que añadimos?; ¿de qué manera obtenemos una función que no esté en el universo? Para solucionar esta dificultad supongamos que *ZFC* es consistente. Así, por el Teorema de Löwenheim-Skolem, que afirma que toda teoría consistente formulada en un lenguaje numerable tiene un modelo numerable, *ZFC* tiene un modelo numerable M.

A partir de ahora, como tenemos tres universos distintos, V, M y el modelo N obtenido mediante *forcing* a partir de M, entran en juego, por decirlo de alguna manera, tres puntos de vista distintos: el punto de vista de cada uno de los modelos. Es importante distinguirlos, pues el no hacerlo lleva a confusiones. Como ejemplo de confusión tenemos la siguiente "paradoja": como M es modelo de *ZFC*, M demuestra que hay al menos $\aleph_1$ funciones de ω en $\{0,1\}$. Ahora bien, como M es numerable, como máximo hay $\aleph_0$ funciones de ω en $\{0,1\}$ en M. Pero esto es absurdo. Lo que en realidad sucede es lo siguiente: como M es modelo de *ZFC*, hay un ordinal γ que es el cardinal $\aleph_1$ de M. Ahora bien, como M es numerable, γ es, en realidad, un ordinal numerable que en M hace el papel de $\aleph_1$; es decir, M demuestra que γ es el primer ordinal no numerable. Pero γ no es el cardinal $\aleph_1$ desde el punto de vista de V. Dicho de otro modo, tanto V como M coinciden en que en M hay γ funciones, pero para M, γ es infinito no numerable y, para V, es un ordinal numerable.

Así existen muchas funciones de ω en $\{0,1\}$ que no están en M. Esto soluciona la primera dificultad: la nueva función será una de las muchas que no están en M pero sí en V.

La segunda dificultad es de qué forma añadir a M una función c de manera que el resultado sea un modelo N de *ZFC*. El problema en este caso no es sólo garantizar que el resultado es un modelo de *ZFC*. Por ejemplo, $M \cup \{c\}$, donde c es una función que no está en M, no es un modelo de *ZFC*, pues le faltarán todos los conjuntos definibles usando c como parámetro. Pero esto sólo es la punta del iceberg. Para darnos cuenta de la magnitud del problema consideremos la posible situación en la que M, el modelo numerable de partida, es de la forma L_α para algún ordinal numerable α. Debemos garantizar que el modelo obtenido no es de la forma L_β para algún ordinal numerable β. Porque *HC* es verdadera en todos los modelos de la forma L_β y por lo tanto no habríamos conseguido nada. Así pues, la función que añadamos al modelo M debe ser una función que no sea construible ni siquiera en el modelo N obtenido. La técnica del forcing ideada por Cohen nos permite obtener a partir de M el menor modelo numerable N de ZFC que incluye a $M \cup \{c\}$ y que tiene exactamente los mismos ordinales que M. Esto garantiza que N nunca será de la forma L_β para algún β, ya que para cada ordinal α, L_α es único. Así pues no podemos añadir a M cualquier función que no esté en M. El problema es cómo elegir esta función.

La idea fundamental del *forcing* es construir desde M la nueva función c de ω en $\{0,1\}$ a partir de las secuencias finitas de 0 y 1, esto es todas las funciones p de $\{0,1,...,n\}$ en $\{0,1\}$ para algún $n \in \omega$. Cada una de estas secuencias codifica información sobre una posible nueva función en tanto que es un posible segmento inicial de ella. Por ejemplo, la secuencia $\{\langle 0,1 \rangle\}$ nos dice que el valor de la función para el argumento 0 será 1. Sea $\{0,1\}^{<\omega}$ el conjunto de todas las secuencias finitas de 0 y 1.

La secuencia $\{\langle 0,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle\}$ nos dice que el valor de la nueva función para el argumento 0 será 1 y para el argumento 1 será 0. Así, cuanto más larga sea la secuencia, más información sobre la nueva función codificará. Definimos, informalmente, la relación $\leq$ entre secuencias finitas de 0 y 1, por $p \leq q$ sii p da tanta o más información que q sobre la nueva función. Es claro que $\langle \{0,1\}^{<\omega}, \leq \rangle$ es un orden parcial. De hecho, como vemos por el ejemplo anterior, en el caso que nos ocupa, tenemos que $p \leq q$ sii $q \subseteq p$.

Observemos que las secuencias $\{\langle 0,1 \rangle\}$ y $\{\langle 0,0 \rangle\}$ codifican información incompatible sobre la función que planeamos añadir, pues mientras que la primera nos dice que el valor de 0 será 1, la segunda nos dice que el valor de 0 será 0. Así no hay ninguna secuencia que incluya a ambas. Hay pues una segunda relación a tener en cuenta, la relación de incompatibilidad. Decimos que p y q son secuencias incompatibles y escribimos $p \perp q$ sii la información que codifican sobre el objeto que planeamos añadir es incompatible, esto es, sii no hay ninguna secuencia r tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. En el caso que nos ocupa, resulta que $p \perp q$ sii $p \cup q$ no es una secuencia finita de 0 y 1, no es una función. Decimos que dos secuencias son *compatibles* sii no son incompatibles. En este contexto, decimos que $\mathbb{P} = \langle \{0,1\}^{<\omega}, \leq, \perp \rangle$ es una noción de *forcing*.

Si f es una función de ω en $\{0,1\}$, entonces el conjunto $G = \{f \upharpoonright n : n \in \omega\}$ es un conjunto de secuencias finitas de 0 y 1 con las dos propiedades siguientes:

1. Para cualquier $p \in G$ y cualquier secuencia q, si $p \leq q$, entonces $q \in G$;
2. Para cualesquiera $p,q \in G$, p y q son compatibles; esto es, hay $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$;

Además G es maximal respecto a (1) y (2). Y viceversa, si tenemos un conjunto G de secuencias fintas de 0 y 1 que cumple (1) y (2) y que además es maximal respecto a (1) y (2), entonces $\bigcup G$ es una función de ω en $\{0,1\}$. Un conjunto que cumpla (1) y (2) es un *filtro*.

Sin embargo, si f es una función en nuestro modelo M, entonces $\bigcup \{f \upharpoonright n : n \in \omega\} = f$. Por lo tanto, esta manera de proceder todavía no nos permite añadir una nueva función. Sea para cada función f de ω en $\{0,1\}$,

$D_f=\{p\in\{0,1\}^{<\omega}:p\not\subseteq f\}$. Notemos que para cada función f, D_f tiene la siguiente propiedad:

(∗) Para toda secuencia q hay una secuencia $p\in D_f$ tal que $p\leq q$

Supongamos ahora que G es un filtro que además cumple que para cada f en M, $G\cap D_f\neq\emptyset$. Entonces, si c es la unión de G, c es una función distinta a todas las funciónes de M. Pues para cada función f en M habrá un segmento inicial de c que no será segmento inicial de f.

¿Podemos pues añadir a M una función c obtenida a partir un filtro G que cumpla $G\cap D_f\neq\emptyset$ para cada f en M? La respuesta es que no. Con ello no podemos garantizar todavía que el modelo obtenido no sea de la forma L_β para algún β. El problema es que aun así la función c podría poseer alguna propiedad que la hiciera definible con parámetros en M y, por lo tanto, construible en N. Decimos que un subconjunto D de $\{0,1\}^{<\omega}$ es *denso* si cumple (∗) anterior. La idea es que a todas las propiedades que de una forma u otra pudieran definir con parámetros en M una función de ω en $\{0,1\}$ les corresponde un subconjunto denso de $\{0,1\}^{<\omega}$ que pertenece a M y evita que c posea tal propiedad. Los subconjuntos densos D_f son los correspondientes a la propiedad "ser f". Entonces, si G es un filtro de $\mathbb{P}$ tal que

3. para todo subconjunto denso $D\in M$, $G\cap D\neq\emptyset$

esto es, un *filtro* $\mathbb{P}$*-genérico sobre M*, y c es su unión, c es una función de ω en $\{0,1\}$ que evita todas las propiedades que, con párametros en M, pudieran definirla.

¿Hay algún $\mathbb{P}$-genérico sobre M? La respuesta es que sí. Como M es numerable podemos fijar (en V) una enumeración $\langle D_n:n\in\omega\rangle$ de todos los subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Fijamos ahora p_0 un elemento cualquiera de D_0. Dado p_n, con $n\in\omega$, tal que $p_n\in D_n$, por densidad de D_{n+1}, podemos fijar $p_{n+1}\in D_{n+1}$ tal que $p_{n+1}\leq p_n$. Entonces, $G=\{q\in\{0,1\}^{<\omega}:(\exists n\in\omega)(p_n\leq q)\}$ es un filtro genérico sobre M.

Si M es un modelo numerable de *ZFC*, $\mathbb{P}$ es la noción de forcing en M y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, y construimos $M[G]$, el menor modelo numerable de *ZFC* que incluye a $M\cup\{G\}$, entonces, no sólo $M[G]$ es modelo de *ZFC* sino que tiene los mismos ordinales que M, con lo que necesariamente $M[G]$ no es de la forma L_β para ningún ordinal β, sino que además, G y c no son construibles en $M[G]$. La demostración de que $M[G]$ tiene todas estas propiedades no es trivial y se basa en que G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Para ello Cohen introdujo la relación de *forcing* en M entre los elementos de P y fórmulas del lenguaje de la Teoría de Conjuntos ampliado con nombres para los elementos de $M[G]$ y demuestra el *Teorema del Forcing*:

TEOREMA DEL *FORCING*. Sean M un modelo numerable de *ZFC* y $\mathbb{P}$ una noción de forcing en M. Entonces para todo enunciado φ (del lenguaje ampliado) y todo p en $\mathbb{P}$, p fuerza φ sii para todo un filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M, φ es verdadera en $M[G]$.

De este modo es posible determinar qué enunciados van a ser verdaderos y qué enunciados van a ser falsos en $M[G]$ antes de construirlo, pues sólo hay que comprobar que p fuerza el enunciado en M para concluir que es verdadero o falso en $M[G]$.

Finalmente, para obtener un modelo de *ZFC* en el que *HC* es falsa sólo hay que añadir $\aleph_2$ funciones distintas a M. Para ello usamos el producto directo de $\aleph_2$ copias de la noción de *forcing* empleada para añadir una función. Entonces obtenemos una secuencia $\langle G_\alpha:\alpha<\aleph_2\rangle$ de filtros mutuamente genéricos, uno para cada copia de nuestra nocion de *forcing*. Entonces $M[\langle G_\alpha:\alpha<\aleph_2\rangle]$ demuestra que hay como mínimo $\aleph_2$ funciones de ω en $\{0,1\}$ y por lo tanto $\aleph_2$ subconjuntos de ω. Por lo tanto, *HC* es falsa en $M[\langle G_\alpha:\alpha<\aleph_2\rangle]$.

Hay que tener en cuenta que añadimos $\aleph_2$ funciones a M en el sentido de M, no en el de V. Es decir, añadimos una cantidad numerable, desde el punto de vista de V, de funciones de ω en $\{0,1\}$ de manera que haya $\aleph_2$ desde el punto de vista de M. Sea γ el ordinal numerable que en M desempeña el papel de $\aleph_2$. Entonces a M, desde el punto de vista de V, le hemos añadido la sequencia $\langle G_\alpha:\alpha<\gamma\rangle$ para obtener el modelo $M[\langle G_\alpha:\alpha<\gamma\rangle]$. Para asegurar que *HC* es falsa en $M[\langle G_\alpha:\alpha<\gamma\rangle]$ debemos garantizar que γ también desempeña, en $M[\langle G_\alpha:\alpha<\gamma\rangle]$, el papel de $\aleph_2$. Si, por alguna razón, el ordinal numerable γ que en M realiza el papel de $\aleph_2$, realiza el papel de $\aleph_1$ en $M[\langle G_\alpha:\alpha<\gamma\rangle]$, entonces *HC* continuará siendo verdadera en $M[\langle G_\alpha:\alpha<\gamma\rangle]$. Afortunadamente, las propiedades combinatorias de la noción de *forcing* permiten demostrar que ello es así. Solamente después de haber realizado todas estas comprobaciones, podemos afirmar que hemos logrado un modelo de *ZFC* en el que *HC* es falsa y por lo tanto habremos demostrado que si *ZFC* es consistente también lo es $ZFC+\neg HC$.

El método de *forcing* es crucial en Teoría de Conjuntos y desde su aparición se ha revelado muy potente para demostrar la independencia de muchas conjeturas. Mediante este método pueden añadirse no sólo un subconjunto de ω o cualquier cantidad de subconjuntos de ω a un modelo de *ZFC*, sino cualquier clase de objeto. Para ello, partimos de un modelo numerable M de *ZFC* y diseñamos un orden parcial $\mathbb{P}$ tal que para cualquier filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M, en $M[G]$, el modelo que resulta de añadir G a M, contiene el objeto que queríamos. Los enunciados que son verdaderos en $M[G]$ vienen forzadas por los elementos de $\mathbb{P}$, como demuestra el Teorema del *forcing*, y las propiedades de preservación de cardinales dependen exclusivamente de las propiedades combinatorias de $\mathbb{P}$. Todo ello nos permite hablar del modelo $M[G]$ desde M. Por ejemplo, Solovay la usó para demostrar que si *ZFC* más el *Axioma de los cardinales inaccessibles* es consistente, también lo es *ZFC* más "todo conjunto de reales definible es medible en el sentido de Lebesgue" [Solovay (1970)]; Martin y Solovay demostraron que si *ZFC* es consistente, también lo es *ZFC* más la Hipótesis consistente, también lo es *ZFC* más la Hipótesis de Suslin [Martin y Solovay (1970)]; Laver demostró que si *ZFC* es consistente, también lo es *ZFC* más la Conjetura de Borel [Laver (1976)], para mencionar algunas de las aplicaciones de la técnica de *forcing* en los años 70.

V. *FORCING* Y EL PROBLEMA DE LA AMPLITUD DE V

Para simplificar, dejemos de lado que en el *forcing* se trabaja con modelos numerables de *ZFC* e imaginemos que realizamos el *forcing* sobre V. Por decirlo de alguna manera, con la técnica de *forcing*, al aplicarla sobre V, obtenemos universos ideales, no reales, en los que son verdaderos algunos enunciados que no podemos demostrar en *ZFC*. En este sentido la técnica de *forcing* es justamente opuesta al universo L de los conjuntos construibles. Recordemos que, si el *Axioma de Construibilidad* es falso, al trabajar con el universo L lo que hacemos es "estrechar" el universo real, V, de los conjuntos. Con el *forcing* lo que hacemos es justamente lo contrario, es decir, ampliamos nuestro universo V al añadirle un objeto que no está en él, pasando a un universo ideal, $V[G]$. Llama la atención que *HC* se resuelva de forma tan dispar y natural, según la dirección por la que optemos. Si estrechamos nuestro universo hasta obtener el menor universo de *ZFC* con todos los ordinales, *HC* es verdadera. Para que *HC* sea falsa hay que añadir objetos, ampliar el universo de la Teoría de Conjuntos[4]. Este fenomeno, que un enunciado independiente de *ZFC* se resuelva en un sentido en L y en su sentido opuesto en $V[G]$, G un filtro $\mathbb{P}$-genérico para algún orden parcial $\mathbb{P}$ en V, es muy frecuente en Teoría de Conjuntos.

La técnica de *forcing* ha demostrado ser muy fructífera para resultados de consistencia, esto es para resultados del tipo "si una teoría T_1 es consistente, entonces también lo es una teoría T_2", donde la teoría T_1 acostumbra a ser *ZFC* o *ZFC* más un axioma de gran cardinal, y la teoría T_2 acostumbra a ser *ZFC* más algún enunciado. Sin embargo, recientemente se ha descubierto que se puede exprimir un poco más la técnica de *forcing* y obtener, en lugar de resultados de consistencia, demostraciones de teoremas. La otra noción fundamental involucrada en estas demostraciones es la de submodelo elemental. Dados dos modelos M y N de la Teoría de Conjuntos, decimos que *M es submodelo elemental de N* sii $M\subseteq N$ y toda fórmula con todos su parámetros en M, es verdadera en M sii lo es en N, es decir, para toda fórmula $\varphi(v_0,...,v_n)$ y cualesquiera $a_0,...,a_n \in M$,

$$M\vDash\varphi(a_0,...,a_n) \text{ sii } N\vDash\varphi(a_0,...,a_n)$$

Sabemos que $V\subseteq V[G]$, donde G es un filtro genérico para algún orden parcial $\mathbb{P}$. Si además tenemos que V es submodelo elemental de $V[G]$, entonces aquellas fórmulas, cuyos parámetros sean todos elementos de V, que sean verdaderas en $V[G]$, también lo serán en V. Por ejemplo, supongamos que queremos demostrar que en V es verdadero el enunciado $\exists v\varphi(v,a)$ donde a es un conjunto de V. Definimos un orden parcial $\mathbb{P}$ en V y obtenemos un filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre V tal que V es un submodelo elemental de $V[G]$ y en $V[G]$ hay un b tal que $V[G]\vDash\varphi(b,a)$. Entonces $V[G]\vDash\exists v\varphi(v,a)$ y, por elementariedad, tenemos que $V\vDash\exists v\varphi(v,a)$. Es decir, ya había en V un conjunto c, que no tiene por qué ser el mismo b de $V[G]$, tal que en V ya testificaba que hay un conjunto x tal que $\varphi(x,a)$. Es decir, de hecho *ZFC* implica $\exists v\varphi(v,a)$. Este método ha demostrado ser muy efectivo ya sea para simplificar demostraciones de resultados clásicos, ya sea para obtener nuevos resultados, ya sea para relacionar resultados en distintos campos de la Teoría de Conjuntos.

La dificultad aquí estriba en encontrar en qué condiciones se da la relación de elementariedad entre V y sus extensiones mediante *forcing*. Sabemos que en algunos casos es consistente, pero ello depende tanto de la complejidad del orden parcial usado como de la complejidad de los parámetros de V empleados [véase Bagaria y Bosch (2004), Shindler (2001) o Hauser (1995)]. En todos los artículos antes mencionados se estudia el caso en el que los parámetros empleados son esencialmente subconjuntos de ω. Es decir, se ha demostrado que para ciertas clases de órdenes parciales Γ, la afirmación: "para todo orden parcial $\mathbb{P}\in\Gamma$, todo filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, toda fórmula $\varphi(v_0,...,v_n)$ y cualesquiera $a_0,...,a_n$ en V tales que $a_0,...,a_n$ son todos ellos subconjuntos de ω,

(**) $\quad V\vDash\varphi(a_0,...,a_n)$ sii $V[G]\vDash\varphi(a_0,...,a_n)$"

es consistente relativamente a la existencia de grandes cardinales, más grandes cuanto más complejos son los órdenes parciales de la clase Γ.

Para el caso de fórmulas con parámetros más complejos la situación es más delicada. Por ejemplo, para fórmulas cuyos parámetros son esencialmente subconjuntos de $\aleph_1$, en general es inconsistente; es decir , la suposición de que hay órdenes parciales $\mathbb{P}$ tales que para algún filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, toda fórmula $\varphi(v_0,...,v_n)$ y cualesquiera $a_0,...,a_n$ en V, todos ellos subconjuntos de $\aleph_1$, la suposición de que (**) se cumple lleva a una contradicción. El único caso en el que es consistente es el caso de las fórmulas Σ_1; es decir, aquellas fórmulas de la forma $\exists v_0...v_n\varphi$ donde en φ todos sus cuantificadores son de la forma $\exists y\in x$ o de la forma $\forall y\in x$, es decir, cuantificadores acotados. Pero este caso ha resultado ser enormemente fructífero. Bagaria [Bagaria (1997) y (2000)] ha demostrado que son equivalentes a los axiomas de *forcing* acotado y estos axiomas se han demostrado tremendamente efectivos [Asperó y Bagaria (2001)], tanto que llegan a solucionar el Problema del Continuo en una dirección completamente contraria a la de L: implican que $2^{\aleph_0}$ es $\aleph_2$ [Todorcevic (2002)].

En 1995 Goldstern y Shelah [Goldstern y Shelah (1995)] formularon el primer axioma de *forcing* acotado como tal, aunque resultó que el primer axioma de *forcing* conocido, el *Axioma de Martin*, *MA*, [véase Martin y Solovay (1970)], ya era una forma de axioma de *forcing* acotado. Simplificando, los axiomas de *forcing* vienen a afirmar que en V existen filtros genéricos que tienen intersección no vacía con unos pocos subconjuntos densos, en lugar de todos los subconjuntos densos en un modelo de *ZFC*. Los axiomas de *forcing* acotados se obtienen al exigir que los subconjuntos densos intersectados tengan todos ellos cardinalidad a lo sumo $\aleph_1$. Esta formulación tan técnica de los axiomas de *forcing* y de los axiomas de *forcing* acotado provocó que todos estos axiomas fueran considerados meramente como axiomas útiles, axiomas que permitían obtener resultados de consistencia de forma sencilla, en una dirección opuesta a la que permitía el *Axioma de Construibilidad*. Entre los investigadores en Teoría de Conjuntos es famosa la máxima que dice: si quieres demostrar que φ es un enunciado independiente de *ZFC*, prueba primero a demostrar que $ZFC+V=L$ implica φ y que $ZFC+MA$ implica $\neg\varphi$.

Sin embargo, la equivalencia que demostró Bagaria hizo que la mirada hacia estos axiomas cambiara considerablemente, pues vistos como principios que afirman que V y $V[G]$ son elementales para fórmulas Σ_1 con todos sus parámetros subconjuntos de $\aleph_1$, son, en cierto sentido, axiomas naturales. En primer lugar són principios análogos al Principio de Reflexión, son lo que podríamos llamar principios de reflexión genérica. Recordemos que el Principio de Reflexión viene a decir que algo que es verdadero de V queda incorporado en V y de hecho es verdadero en muchos segmentos iniciales de V. Los axiomas de *forcing* acotado vienen a decir que aquellos hechos (expresables mediante fórmulas Σ_1 con todos sus parámetros subconjuntos de $\aleph_1$) que son verdaderos en una extensión ideal de V quedan incorporados de hecho en V y por lo tanto son verdaderos en V y muchos segmentos iniciales de V. Esta analogía con el Principio de Reflexión que en el caso de los axiomas de grandes cardinales hacía que se debieran tomar seriamente como verdaderos axiomas de la Teoría de Conjuntos, también debiera hacer que los axiomas de *forcing* acotado se consideraran seriamente como axiomas de la Teoría de Conjuntos.

Los axiomas de *forcing* acotado también resultan ser un buen análisis del problema de la amplitud de V. Al afirmar que existen ya en V testigos para las propiedades Σ_1 que los subconjuntos de $\aleph_1$ gozan en extensiones ideales $V[G]$ de V, implican que existen conjuntos cuya existencia no puede ser demostrada usando solamente los axiomas *ZFC*. En este sentido, son una respuesta parcial al problema de la amplitud de V.

Una tercera razón para considerar los axiomas de *forcing* acotado como buenos axiomas para la Teoría de Conjuntos, es que son un tipo de propiedad máxima de los conjuntos. Cualquiera que trabaje en Teoría de Conjuntos tiene la sensación de que V goza de algún tipo de propiedad máxima, algo que muy informalmente podríamos formular como "toda colección que pueda ser un conjunto, es un conjunto". Gödel [Gödel (1964)] rechaza el *Axioma de Construibilidad* porque en cierta manera lo que hace es establecer una propiedad mínima de los conjuntos. $V=L$ implica que las únicas colecciones que son conjuntos son aquellas colecciones que son hereditariamente definibles, impidiendo que existan conjuntos aleatorios, conjuntos que no sean en ningún sentido definibles. El problema en esta formulación es especificar qué significa que una colección "pueda ser un conjunto", cuál es el criterio por el que una colección puede ser un conjunto. No puede ser simplemente que es consistente que sea un conjunto, pues hay colecciones que aunque por separado es consistente que sean conjuntos, es inconsistente que ambas lo sean. Podemos ver los axiomas de *forcing* acotado como una manera más precisa de formular este principio para el caso de los subconjuntos de $\aleph_1$: en el universo están todos aquellos conjuntos necesarios para que los subconjuntos de $\aleph_1$ gocen de todas las propiedades Σ_1 que pueden gozar en alguna extensión ideal de V.

Departamento de Filosofía. Universidad de Oviedo
C/ Teniente Alfonso Martínez, s/n.33011 Oviedo
E-mail: *roger@uniovi.es*

NOTAS

[1] Mantenemos la ambigüedad usual según la cual *ZFC* denota tanto a los axiomas de la Teoría de Conjuntos como a la teoría misma, es decir todas las consecuencias de los axiomas. El contexto aclarará en cada momento en qué sentido lo usamos.

[2] Codificando las fórmulas con números naturales podemos obtener una fórmula del lenguaje de la aritmética elemental que afirma la consistencia de la teoría expresando algo así como "no hay ninguna demostración formal de una contradicción". Que una teoría no demuestre su propia consistencia significa que no implica tal fórmula.

[3] Esta es una de las principales razones por las que los estudiosos de la Teoría de Conjuntos creen que el *Axioma de Construibilidad* es falso, pues resulta ser incompatible con un axioma de gran cardinal que es razonable suponer que es verdadero por todo lo dicho en esta sección.

[4] Es cierto que con la técnica de *forcing* se puede obtener un modelo en el que *HC* es verdadera. Simplemente hay que añadir una función de $P(\omega)$ en $\aleph_1$. Sin embargo, a no ser que *HC* sea verdadera ya en el modelo de partida, algunos cardinales del modelo obtenido serán distintos al los del modelo obtenido.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASPERÓ, D., BAGARIA, J. (2001), 'Bounded forcing axioms and the Continuum', *Annals of Pure and Applied Logic*, 109, pp. 179-203.

BAGARIA, J. (1997), 'A charaterization of Martin's Axiom in terms of absoluteness', *The Journal of Symbolic Logic*, 62, pp. 366-372.

BAGARIA, J. (2000), 'Bounded forcing axioms as principles of generic absoluteness', *Archive for Mathematical Logic*, 39, pp. 393-401.

BAGARIA, J., BOSCH, R. (2004), 'Solovay models and forcing extensions', *The Journal of Symbolic Logic*, 69, pp. 742-766.

COHEN, P. (1963), “The independence of the Continuum Hypothesis”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of U.S.A*, 50, pp. 1143-1148.

—— (1964), “The independence of the Continuum Hypothesis. II”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of U.S.A*, 51, pp. 105-110.

—– (1966), *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin: New York.

GÖDEL, K. (1938) ‘The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis’, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 24, pp. 556-557.

—– (1939), ‘Consistency proof for the Generalized Continuum Hypothesis’, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 25, pp. 220-224.

—– (1940), *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton University Press: Princeton, New Jersey.

—– (1964), `What is Cantor’s Continuum Problem?’ en Benacerraf, P. y Putnam, H. (eds.), *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Prentice-Hall, Inc: Engelwood Cliffs, New Jersey, pp. 258-273.

—– (1967), ‘On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I’ en van Heijenoort, J. (ed.), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press: Cambridge, Massachusetts, pp. 596-616. Publicado primero como ‘Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, pp. 173-198.

GOLDSTERN, M., SHELAH, S. (1995), ‘The bounded proper forcing axiom’, *The Journal of Symbolic Logic*, 60, pp. 58-73.

HAUSER, K. (1995), ‘The consistency strength of projective absoluteness’, *Annals of Pure and Applied Logic*, 74, pp. 245-295.

LAVER, R. (1976), ‘On the consistency of Borel Conjecture’, *Acta Mathematica*, 137, pp. 151-169.

LEVY, A. (1960), ‘Axiom schemata of strong infinity in set theory’, *Pacific Journal of Mathematics*, 10, pp. 223-238.

LEVY, A., SOLOVAY, R. (1967), ‘Measurable cardinals and the Continuum Hypothesis’, *Israel Journal of Mathematics*, 5, pp. 234-248.

MARTIN, D., SOLOVAY, R. (1970), ‘Internal Cohen extensions’, *Annals of Mathematical Logic*, 2, pp. 143-178.

MONTAGUE, R.M., (1961), ‘Fraenkel’s addition to the axioms of Zermelo’ en Bar-Hillel, Y., Poznanski, E. I. J., Rabin, M. O. y Robinson, A. (eds.): *Essays on the Foundations of Mathematics*, Magnes Press: Jerusalem, pp. 91-114.

SCOTT, D. S. (1961), ‘Measurable cardinals and constructible sets’, *Butlletin de l’ Académie Polonaise des Sciences. Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques*, 9, pp. 521-524

SCHINDLER, R.-D. (2001), ‘Proper forcing and reamarkable cardinals, II’, *The Journal of Symbolic Logic*, 66, pp. 1481-1492.

SOLOVAY, R. (1970), ‘A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable’, *Annals of Mathematics*, 92, pp. 1-56.

TODORCEVIC, S. (2002), ‘Generic absoluteness and the Continuum’, *Mathematical Research Letters*, 9, pp. 465-471-

ULAM, S., (1930) 'Zur Masstheorie in der algemeinen Mengenlehre', *Fundamenta Mathematicae*, 16, pp. 140-150.